ThS. VÕ GIANG GIAI

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

LUYỆN THI TÚ TÀI, ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Thạc sĩ VÕ GIANG GIAI

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

- Bồi dưỡng học sinh khá và giỏi
- Ôn thi Olympic Toán trong nước và quốc tế
- Ôn thi Tú tài, Đại học và Cao đẳng
- Tất cả các bài tập đều có hướng dẫn và giải chi tiết

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỘT SỐ KÍ HIỆU VIẾT TẮT TRONG SÁCH

ΔABC	*tam giác ABC có A, B, C là ba đỉnh*
A, B, C	*lần lượt là ba góc BAC, ABC, ACB của* ΔABC
a, b, c	*độ dài các cạnh đối diện góc A, B, C tương ứng*
h_a, h_b, h_c	*độ dài các đường cao xuất phát từ A, B, C tương ứng*
m_a, m_b, m_c	*độ dài các trung tuyến xuất phát từ A, B, C tương ứng*
l_a, l_b, l_c	*độ dài các phân giác trong xuất phát từ A, B, C tương ứng*
l'_a, l'_b, l'_c	*độ dài các phân giác ngoài (nếu có) xuất phát từ A, B, C tương ứng*
r_a, r_b, r_c	*độ dài bán kính các đường tròn bàng tiếp A, B, C tương ứng*
R, r	*bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp* ΔABC
$S_{\Delta ABC}$	*diện tích tam giác ABC*
p	*nửa chu vi tam giác ABC*
BĐT	*bất đẳng thức*
B.C.S	*bất đẳng thức Bunhiacopski*
đpcm	*điều phải chứng minh*
*	*bài tập khó (dành cho học sinh khá, giỏi)*

Chương 1. ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

MỘT SỐ CÔNG THỨC CẦN NHỚ

(Được chứng minh lại và mở rộng)

1. ĐỊNH LÍ HÀM SIN

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\Leftrightarrow \quad a = 2R\sin A, \quad b = 2R\sin B, \quad c = 2R\sin C$$

2. ĐỊNH LÍ HÀM COS

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

Hệ quả 1 :

- $\hat{A}$ *nhọn* $\left(0 < A < \frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < b^2 + c^2$
- $\hat{A}$ *vuông* $\left(A = \frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2$
- $\hat{A}$ *tù* $\left(\frac{\pi}{2} < A < \pi\right) \quad \Leftrightarrow \quad a^2 > b^2 + c^2$

Tương tự : B, C cũng vậy.

- ***Chứng minh :***

+ $\hat{A}$ nhọn $\Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 > a^2$

+ $\hat{A}$ vuông $\Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$

+ $\hat{A}$ tù $\Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 < a^2$

- **Chú ý :** Ta có thể chứng minh ***hệ quả 1*** theo cách như sau :

Dựng đường tròn đường kính BC cắt AB (hoặc AB kéo dài tại M).

Nếu $\widehat{A}$ nhọn : A nằm ngoài đường tròn, M nằm trên đoạn AB.

Lúc đó : $AB > MB$, $AC > MC \Rightarrow AB^2 + AC^2 > MB^2 + MC^2$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 > a^2$$

Ngược lại : $b^2 + c^2 > a^2$

Nếu A nằm trong đường tròn thì :

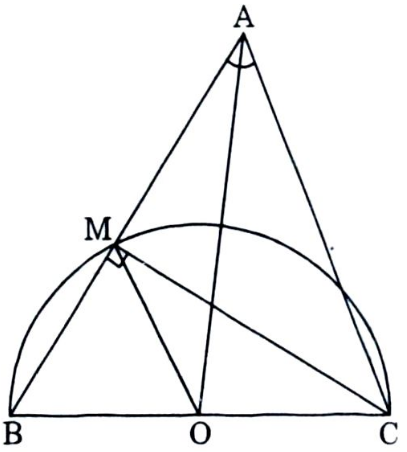
$$\begin{aligned} a^2 &= BC^2 = MB^2 + MC^2 \\ &= (c + MA)^2 + b^2 - MA^2 \\ &= b^2 + c^2 + 2c.MA > b^2 + c^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Vô lí (vì $b^2 + c^2 > a^2$)

$\Rightarrow$ A nằm ngoài đường tròn

$\Rightarrow$ A nhọn

$\Rightarrow$ (đpcm)



Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự (dành cho bạn đọc)

- Cách chứng minh này tuy dài nhưng nó mang tính *"hình học"* hơn.
- Qua cách chứng minh, ta có ngay kết quả sau (chính là hệ quả 2).

Thật vậy :

+ $\widehat{A}$ nhọn $\Leftrightarrow$ A nằm ngoài đường tròn $\Leftrightarrow$ $OA > OM$

$\Leftrightarrow$ $m_a > \frac{a}{2}$ $\Leftrightarrow$ $2m_a > a$

+ $\widehat{A}$ vuông $\Leftrightarrow$ A nằm trên đường tròn $\Leftrightarrow$ $A \equiv M$

$\Leftrightarrow$ $OA = OM$ $\Leftrightarrow$ $m_a = \frac{a}{2}$ $\Leftrightarrow$ $2m_a = a$

+ $\widehat{A}$ tù $\Leftrightarrow$ A nằm trong đường tròn $\Leftrightarrow$ $OA < OM$

$\Leftrightarrow$ $m_a < \frac{a}{2}$ $\Leftrightarrow$ $2m_a < a$

Các góc B, C cũng có kết quả tương tự.

Bạn đọc cũng có thể dùng phương pháp hình học lớp 8 để giải. Quả vậy : "Nếu A nhọn, ta sẽ chứng minh : $2m_a > a$.

Thật vậy : A nhọn $\Rightarrow B + C > \frac{\pi}{2}$, vì vậy : $B > \widehat{OAB}$ hay $C > \widehat{OAC}$ (phải có ít nhất 1 góc đúng) tức là $OA > OB$ hay $OA > OC$. Vậy : $2m_a > a$."

Bạn đọc tự làm tiếp (xem như bài tập)

■ **Hệ quả 2 :**

- $\widehat{A}$ *nhọn* $\Leftrightarrow$ $2m_a > a$
- $\widehat{A}$ *vuông* $\Leftrightarrow$ $2m_a = a$
- $\widehat{A}$ *tù* $\Leftrightarrow$ $2m_a < a$

■ **Hệ quả 3 :**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S\cot A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 4S\cot B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 4S\cot C$$

- ***Chứng minh :***

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = b^2 + c^2 - 4\left(\frac{1}{2}bc.\sin A\right)\frac{\cos A}{\sin A}$$
$$= b^2 + c^2 - 4S.\cot A$$

Chứng minh tương tự : $b^2 = c^2 + a^2 - 4S.\cot B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 4S.\cot C$

■ **Chú ý :** Qua *hệ quả 3,* suy ra :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\cot A + \cot B + \cot C)$$

■ **Hệ quả 4 :**

$$a^2 = (b - c)^2 + 4S.\tan\frac{A}{2}$$
$$b^2 = (c - a)^2 + 4S.\tan\frac{B}{2}$$
$$c^2 = (a - b)^2 + 4S.\tan\frac{C}{2}$$

- ***Chứng minh :***

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos A)$$
$$= (b - c)^2 + 4\left(\frac{1}{2}bc.\sin A\right)\frac{1 - \cos A}{\sin A} = (b - c)^2 + 4S.\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}}$$
$$= (b - c)^2 + 4S.\tan\frac{A}{2}$$

Chứng minh tương tự : $b^2 = (c - a)^2 + 4S.\tan\frac{B}{2}$

$c^2 = (a - b)^2 + 4S.\tan\frac{C}{2}$

■ **Chú ý :** Qua *hệ quả 4*, suy ra :

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 4S\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$$

3. ĐỊNH LÍ HÀM TANG

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}} = \tan\frac{A-B}{2}.\tan\frac{C}{2}$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}} = \tan\frac{B-C}{2}.\tan\frac{A}{2}$$

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\tan\frac{C-A}{2}}{\tan\frac{C+A}{2}} = \tan\frac{C-A}{2}.\tan\frac{B}{2}$$

- ***Chứng minh :*** Theo định lí hàm sin : $a = 2R.\sin A$, $b = 2R.\sin B$

Suy ra : $$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{2\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$= \frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}} = \tan\frac{A-B}{2}.\tan\frac{C}{2}$$

Các công thức còn lại chứng minh tương tự.

4. ĐỊNH LÍ VỀ DIỆN TÍCH

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}ca.\sin B = \frac{1}{2}ab.\sin C$$

$$= pr = \frac{abc}{4R} = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (công thức Hêrông)}$$

$$= \sqrt{r.r_a.r_b.r_c} \qquad (1)$$

$$= p^2.\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} = 2R^2\sin A.\sin B.\sin C \qquad (2)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)} \qquad (3)$$

- **Chú ý 1 :** Các công thức (1), (2), (3) "đi thi" phải chứng minh lại, ở đây chúng tôi giới thiệu, để bạn đọc tham khảo.

- *Chứng minh :*

+ Ta có : $S = pr = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$

$$\Rightarrow \quad S^4 = p(p-a)(p-b)(p-c)r.r_a.r_b.r_c = S^2.r.r_a.r_b.r_c$$

$$\Rightarrow \quad S = \sqrt{r.r_a.r_b.r_c}$$

+ $S = \dfrac{1}{2}bc.\sin A = \dfrac{1}{2}(2R.\sin B)(2R.\sin C).\sin A = 2R^2\sin A.\sin B.\sin C$

+ $S = pr$ và $r = (p-a)\tan\dfrac{A}{2} = (p-b)\tan\dfrac{B}{2} = (p-c)\tan\dfrac{C}{2}$

Suy ra : $S^3 = p^3.r.r.r = p^3(p-a)(p-b)(p-c)\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}.\tan\dfrac{C}{2}$

$$= p^2.S^2.\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S = p^2.\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}$$

+ Theo công thức Hêrông :

$$\begin{aligned}
16S^2 &= 16p(p-a)(p-b)(p-c)\\
&= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\\
&= [(b+c)^2 - a][a^2 - (b-c)^2]\\
&= [2bc + (b^2+c^2-a^2)].[2bc - (b^2+c^2-a^2)]\\
&= 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2\\
&= 4b^2c^2 - (b^4+c^4+a^4+2b^2c^2-2a^2b^2-2c^2a^2)\\
&= 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - (a^4+b^4+c^4)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}$$

- **Chú ý 2 :** Có thể chứng minh (3) trực tiếp như sau :

- *Cách 1* : (Dùng định lí hàm cos)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$\Rightarrow \quad 2bc.\cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\Rightarrow \quad 4b^2c^2(1 - \sin^2 A) = (b^2+c^2-a^2)^2$$

$$= 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - (a^4+b^4+c^4)$$

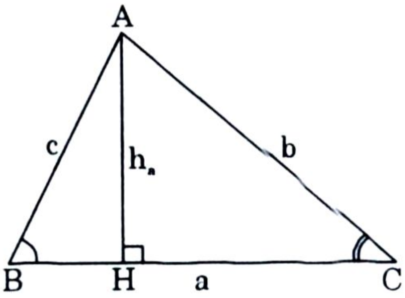
$$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}$$

- *Cách 2* : (Dùng định lí Pitago)

Xét ΔABC với B, C nhọn.

(Vì trong ΔABC, góc tù nếu có thì nhiều nhất là một)

Đặt : $x = BH$, $y = HC$ $(x, y > 0, x + y = a)$



$$x^2 - y^2 = (c^2 - h_a^2) - (b^2 - h_a^2) = c^2 - b^2$$

$$\Rightarrow \quad (x - y)(x + y) = c^2 - b^2$$

$$\Rightarrow \quad x - y = \frac{c^2 - b^2}{a}$$

Vậy : $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = \dfrac{c^2 - b^2}{a} \end{cases} \Rightarrow \quad x = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$

$$\Rightarrow \quad h_a^2 = c^2 - x^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)^2 = \frac{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2} \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad 4a^2.h_a^2 = 4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2$$

$$= 4a^2c^2 - (c^4 + a^4 + b^4 + 2c^2a^2 - 2c^2b^2 - 2a^2b^2)$$

$$= 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

$$\Rightarrow \quad 16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

- **Chú ý 3 :** Từ (4), suy ra :

$$h_a^2 = \frac{(2ac + c^2 + a^2 - b^2)(2ac - c^2 - a^2 + b^2)}{4a^2}$$

$$= \frac{[(c + a)^2 - b^2][b^2 - (c - a)^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{(c + a + b)(c + a - b)(b + c - a)(b - c + a)}{4a^2}$$

$$= \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Đây chính là công thức tính độ dài đường cao và :

$$S = \frac{ah_a}{2} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Như vậy công thức Hêrông cũng được chứng minh.

5. CÔNG THỨC VỀ ĐƯỜNG CAO

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

$$h_b = \frac{2S}{b} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}$$

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$$

6. CÔNG THỨC VỀ TRUNG TUYẾN

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$m_b^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

- ***Chứng minh :*** Theo định lí hàm cos :

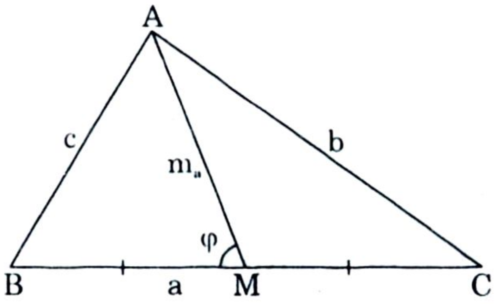
$$c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2m_a.\frac{a}{2}.\cos\varphi$$

$$+$$

$$b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2m_a.\frac{a}{2}.\cos(\pi - \varphi) = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + 2m_a.\frac{a}{2}.\cos\varphi$$

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$



Chứng minh tương tự :

$$m_b^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

■ **Chú ý 1 :**

- Qua công thức trung tuyến, suy ra : $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$
- Có thể dùng vectơ để chứng minh công thức trung tuyến như sau :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \end{cases}$$

Vì vậy : $(\vec{AB} + \vec{AC})^2 + (\vec{AB} - \vec{AC})^2 = 4AM^2 + BC^2$

$$\Rightarrow \quad 2(AB^2 + AC^2) = 4AM^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow \quad m_a^2 = \frac{1}{4}[2(b^2 + c^2) - a^2] \quad \Rightarrow \quad (\text{đpcm}).$$

- **Chú ý 2 :**

Cũng từ : $2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC} \quad \Rightarrow \quad (2\vec{AM})^2 = (\vec{AB} + \vec{AC})^2$

$$\Rightarrow \quad 4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2\vec{AB}.\vec{AC} = b^2 + c^2 + 2bc.\cos A$$

$$\Rightarrow \quad m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc.\cos A}$$

Như vậy, công thức trung tuyến có thể tính như sau :

$$\boxed{\begin{aligned} m_a &= \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc.\cos A} \\ m_b &= \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + a^2 + 2ca.\cos B} \\ m_c &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos C} \end{aligned}}$$

7. CÔNG THỨC VỀ PHÂN GIÁC TRONG

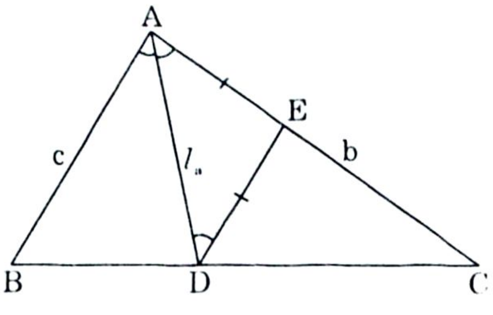
- *Dạng 1 :* $l_a = \dfrac{2bc.\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$; $l_b = \dfrac{2ca.\cos\dfrac{B}{2}}{c+a}$; $l_c = \dfrac{2ab.\cos\dfrac{C}{2}}{a+b}$
- *Dạng 2 :* $l_a = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bc.p(p-a)}$

$$l_b = \frac{2}{c+a}\sqrt{ca.p(p-b)}$$

$$l_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{ab.p(p-c)}$$

- ***Chứng minh :***

+ **Dạng 1 :** $S = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ADC}$



$$\Rightarrow \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}c.l_a.\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}b.l_a.\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow bc.\sin A = (b+c)l_a.\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow l_a = \frac{2bc.\cos\dfrac{A}{2}}{b+c} \quad (\text{vì } \sin A = 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2})$$

Các công thức còn lại cách làm tương tự.

- **Chú ý 1 :**

- *Cách 1 :* Dùng định lí hàm sin trong ΔADB : $\dfrac{l_a}{\sin B} = \dfrac{BD}{\sin\dfrac{A}{2}}$

và : $\dfrac{DC}{DB} = \dfrac{b}{c} \Leftrightarrow \dfrac{DC}{DB} + 1 = \dfrac{b}{c} + 1 \Leftrightarrow \dfrac{a}{DB} = \dfrac{b+c}{c} \Leftrightarrow DB = \dfrac{ac}{b+c}$

Như vậy :

$$l_a = \frac{ac.\sin B}{(b+c)\sin\dfrac{A}{2}} = \frac{2R\sin A.c.\sin B}{(b+c)\sin\dfrac{A}{2}} = \frac{\sin A.c(2R\sin B)}{(b+c)\sin\dfrac{A}{2}} = \frac{2bc}{b+c}.\cos\frac{A}{2}$$

- *Cách 2 :* Kẻ DE // AB cắt AC tại E.

Lúc đó : $\dfrac{AE}{c} = \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{CE}{AC} = \dfrac{AC - AE}{AC} = 1 - \dfrac{AE}{AC} \Rightarrow \dfrac{AE}{c} + \dfrac{AE}{b} = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{AE} = \frac{2\cos\dfrac{A}{2}}{l_a} \quad (\text{vì } l_a = AD = 2AE.\cos\frac{A}{2})$$

$$\Rightarrow \quad l_a = \frac{2bc.\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$$

+ **Dạng 2 :** Theo định lí hàm cos : $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\Rightarrow \quad 1 + \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2p(p-a)}{bc}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

Vậy : $l_a = \dfrac{2bc.\cos\dfrac{A}{2}}{b+c} = \dfrac{2\sqrt{bc.p(p-a)}}{b+c}$

Các công thức còn lại cách làm tương tự.

- **Chú ý 2 :** Qua cách làm, ta có một số công thức "đẹp" :

$$\boxed{\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ ;\quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}\ ;\quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}}$$

- Một cách khác chứng minh công thức *dạng 2.*

Cách dùng vectơ trực tiếp :

Ta có : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \Rightarrow b.\overrightarrow{AD} = b.\overrightarrow{AB} + b.\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \Rightarrow c.\overrightarrow{AD} = c.\overrightarrow{AC} + c.\overrightarrow{CD}$

Vì tính chất đường phân giác : $b.\overrightarrow{BD} + c.\overrightarrow{CD} = \vec{0}$

Nên : $b.\overrightarrow{AD} + c.\overrightarrow{AD} = b.\overrightarrow{AB} + c.\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow (b + c)\overrightarrow{AD} = b.\overrightarrow{AB} + c.\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow (b + c)^2 l_a^2 = 2b^2c^2 + 2bc.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2b^2c^2 + 2bc.bc.\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= bc(2bc + b^2 + c^2 - a^2) = bc[(b + c)^2 - a^2]$$

$$= bc.4.p(p - a)$$

$$\Rightarrow l_a = \frac{2\sqrt{bc.p(p - a)}}{b + c}$$

8. CÔNG THỨC VỀ PHÂN GIÁC NGOÀI

- *Dạng 1 :* $l'_a = \dfrac{2bc\sin\dfrac{A}{2}}{|b - c|} \quad (b \neq c)$

$$l'_b = \frac{2ca.\sin\dfrac{B}{2}}{|c - a|} \quad (c \neq a)$$

$$l'_c = \frac{2ab.\sin\dfrac{C}{2}}{|a - b|} \quad (a \neq b)$$

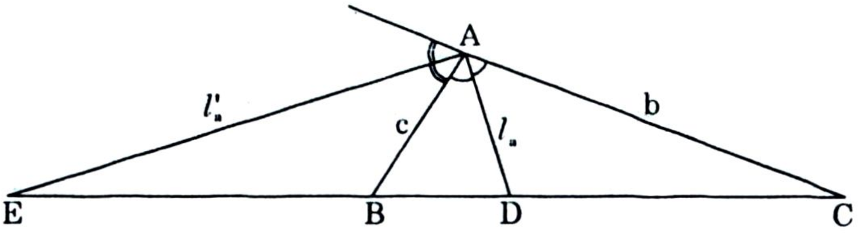
- *Dạng 2 :* $l'_a = \dfrac{2}{|b - c|}\sqrt{bc(p - b)(p - c)} \quad (b \neq c)$

$$l'_b = \frac{2}{|c - a|}\sqrt{ca(p - c)(p - a)} \quad (c \neq a)$$

$$l'_c = \frac{2}{|a - b|}\sqrt{ab(p - a)(p - b)} \quad (a \neq b)$$

- ***Chứng minh :***

+ **Dạng 1 :**



- *Cách 1 :* Ta có : $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AEC} - S_{\Delta AEB}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}b.l'_a.\sin\left(\frac{\pi + A}{2}\right) - \frac{1}{2}ca.\sin\left(\frac{\pi - A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad bc.\sin A = (b - c)l'_a.\cos\frac{A}{2} \quad \Rightarrow \quad l'_a = \frac{bc.\sin A}{(b - c)\cos\frac{A}{2}} = \frac{2bc.\sin\frac{A}{2}}{b - c}$$

$\Rightarrow$ (dpcm).

- *Cách 2 :* Xét ΔABE, theo định lí hàm sin : $\dfrac{l'_a}{\sin\widehat{ABE}} = \dfrac{EB}{\sin\widehat{BAE}}$

Mà : + $\sin\widehat{ABE} = \sin(A + C) = \sin B$

+ $\sin\widehat{BAE} = \sin\left(\dfrac{\pi - A}{2}\right) = \cos\dfrac{A}{2}$

+ Theo tính chất đường phân giác : $\dfrac{EC}{EB} = \dfrac{AC}{AB}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{EC}{EB} - 1 = \frac{AC}{AB} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{EB} = \frac{b - c}{c} \quad \Leftrightarrow \quad EB = \frac{ac}{b - c}$$

$$\to \quad l'_a = \frac{ac.\sin B}{(b - c)\cos\frac{A}{2}} = \frac{(2R.\sin A)c.\sin B}{(b - c)\cos\frac{A}{2}} = \frac{(2R\sin B)c.\sin A}{(b - c)\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{bc.\sin A}{(b - c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc.\sin\frac{A}{2}}{b - c}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

+ **Dạng 2 :** Theo định lí hàm cos : $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\Rightarrow \quad 2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} = \frac{2(p - b)(p - c)}{bc}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}$$

Vậy : $l'_a = \dfrac{2}{b - c}\sqrt{bc(p - b)(p - c)}$

- Cũng có thể giải cách khác như sau :

Ta có : $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} \quad \Rightarrow \quad b.\vec{AE} = b.\vec{AB} + b.\vec{BE}$

$\vec{AE} = \vec{AC} + \vec{CE} \quad \Rightarrow \quad c.\vec{AE} = c.\vec{AC} + c.\vec{CE}$

Hơn nữa : $b.\overrightarrow{BE} = c.\overrightarrow{CE}$ (tính chất đường phân giác ngoài), nên :

$$(b-c)\overrightarrow{AE} = b.\overrightarrow{AB} - c.\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \quad (b-c)^2AE^2 = 2b^2c^2 - 2bc.\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \quad (b-c)^2 l_a'^2 = 2b^2c^2 - 2bc.bc.\cos A$$

$$= 2b^2c^2 - 2bc.bc.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= 2b^2c^2 - bc(b^2+c^2-a^2)$$

$$= bc[a^2-(b-c)^2]$$

$$= 4bc(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow \quad l_a' = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

- **Chú ý :** Qua các chứng minh trên, chúng ta rút ra được một số công thức quen thuộc sau :

- ***Công thức 1 :***

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

- ***Công thức 2 :***

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

- ***Công thức 3 :***

$$\overrightarrow{AD} = \frac{b.\overrightarrow{AB} + c.\overrightarrow{AC}}{b+c}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{b.\overrightarrow{AB} - c.\overrightarrow{AC}}{b-c} \quad (b \neq c)$$

9. CÔNG THỨC VỀ BÁN KÍNH

- ***Bán kính đường tròn ngoại tiếp :***

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

- ***Bán kính đường tròn nội tiếp :***

$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$$

$$= \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

- ***Bán kính đường tròn bàng tiếp :***

$$r_a = p.\tan\frac{A}{2} = \frac{S}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$r_b = p.\tan\frac{B}{2} = \frac{S}{p-b} = \sqrt{\frac{p(p-c)(p-a)}{p-b}}$$

$$r_c = p.\tan\frac{C}{2} = \frac{S}{p-c} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

10. CÔNG THỨC VỀ HÌNH CHIẾU

$$a = b.\cos C + c.\cos B = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

$$b = c.\cos A + a.\cos C = r\left(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\right)$$

$$c = a.\cos B + b.\cos A = r\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\right)$$

11. CÁC CÔNG THỨC KHÁC

- ***Công thức 1 :*** $|b - c| < a < b + c$

  $|c - a| < b < c + a$

  $|a - b| < c < a + b$

- ***Công thức 2 :***

  $A + B + C = \pi$

  $0 < A, B, C < \pi$

- ***Công thức 3 :***

  + $0 < a \le b \le c \Leftrightarrow 0 < \sin A \le \sin B \le \sin C \le 1$

  + $-1 < \cos A, \cos B, \cos C < 1$

- ***Công thức 4 :***

$$\sin A = \sin(B + C) \quad \ldots$$

$$\cos A = -\cos(B + C) \quad \ldots$$

$$\tan A = -\tan(B + C) \quad \left(A \neq \frac{\pi}{2}\right) \ldots$$

$$\cot A = -\cot(B + C) \quad \ldots$$

$$\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B + C}{2} \quad \ldots$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sin\frac{B + C}{2} \quad \ldots$$

$$\tan\frac{A}{2} = \cot\frac{B + C}{2} \quad \ldots$$

$$\cot\frac{A}{2} = \tan\frac{B + C}{2} \quad \ldots$$

■ **Chú ý :**

1. Từ công thức 11, ta có :

$$\left.\begin{array}{l} a < b + c \Rightarrow a^2 < ab + ca \\ b < c + a \Rightarrow b^2 < bc + ab \\ c < a + b \Rightarrow c^2 < ca + bc \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ Ta được công thức *"đẹp"* quen thuộc :

$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)}$$

Chúng ta cũng có thể giải cách khác như sau ;

Theo định lí hàm cos : $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc.\cos A + ca.\cos B + ab.\cos C) < 2(bc + ca + ab)$

(vì : $\cos A, \cos B, \cos C < 1$)

2. Chứng minh sơ lược công thức hình chiếu :

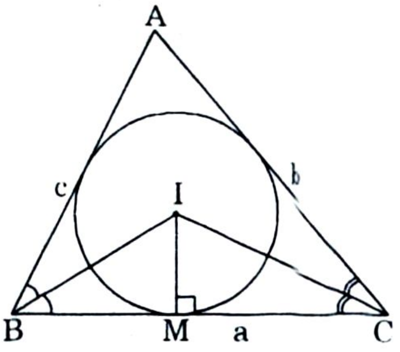
- $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} \quad \Rightarrow \vec{BC}.\vec{BC} = \vec{BA}.\vec{BC} + \vec{AC}.\vec{BC}$

  $\Rightarrow a^2 = ca.\cos B + bc.\cos C$

  $\Rightarrow a = c.\cos B + b.\cos C \ldots$

- Xét ΔIBC :

$$BC = BM + MC = IM.\cot\frac{B}{2} + IM.\cot\frac{C}{2}$$



$$\Rightarrow \quad a = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) \ \ldots$$

Và từ đây cũng suy ra ngay : $\boxed{r = 4R.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}$

(Phần chứng minh dành cho bạn đọc)

CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. BÀI TẬP LIÊN HỆ GÓC

BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

BÀI 1. Cho ΔABC. Chứng minh :

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng các công thức :

- $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$
- $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$ *(công thức nhân 2)*
- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$ *(công thức nhân 2)*

BÀI 2. Cho ΔABC. Chứng minh : cotA.cotB + cotB.cotC + cotC.cotA = 1.

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng các công thức :

- $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x.\tan y}$ *hay* $\cot(x + y) = \frac{\cot x.\cot y - 1}{\cot x + \cot y}$
- $\tan(\pi - x) = -\tan x$ *hay* $\cot(\pi - x) = -\cot x$

BÀI 3. Cho ΔABC thỏa : cosC(sinA + sinB) = sinC.cos(A – B)

Chứng minh : cosA + cosB = 1.

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng các công thức :

- $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$
- $\sin 2x = 2\sin x.\cos x,\quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/ 2829

BÀI 4. Cho ΔABC, $n \in \mathbf{Z}$. Chứng minh :

$$\sin(2n+1)A + \sin(2n+1)B + \sin(2n+1)C =$$

$$= 4(-1)^{n}.\cos(2n+1)\frac{A}{2}.\cos(2n+1)\frac{B}{2}.\cos(2n+1)\frac{C}{2}.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng các công thức :

- $sinx + siny = 2sin\frac{x+y}{2}.cos\frac{x-y}{2}$
- $cosx + cosy = 2cos\frac{x+y}{2}.cos\frac{x-y}{2}$

BÀI 5. Cho ΔABC, $n \in \mathbf{Z}$. Chứng minh :

$$\sin 2nA + \sin 2nB + \sin 2nC = 4(-1)^{n+1}.\sin nA.\sin nB.\sin nC.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng các công thức :

- $sinx + siny = 2sin\frac{x+y}{2}.cos\frac{x-y}{2}$
- $cosx - cosy = -2sin\frac{x+y}{2}.sin\frac{x-y}{2}$

BÀI 6. Cho ΔABC, $n \in \mathbf{Z}$. Chứng minh :

$$\cos(2n+1)A + \cos(2n+1)B + \cos(2n+1)C =$$

$$= 1 + 4(-1)^{n}\sin(2n+1)\frac{A}{2}.\sin(2n+1)\frac{B}{2}.\sin(2n+1)\frac{C}{2}.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng các công thức :

- $cosx + cosy = 2cos\frac{x+y}{2}.cos\frac{x-y}{2}$
- $cosx - cosy = -2sin\frac{x+y}{2}.sin\frac{x-y}{2}$

BÀI 7. Cho ΔABC, $n \in \mathbf{Z}$. Chứng minh :

$$\cos 2nA + \cos 2nB + \cos 2nC = -1 + 4(-1)^{n}\cos nA.\cos nB.\cos nC.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng công thức : $cosx + cosy = 2cos\frac{x+y}{2}.cos\frac{x-y}{2}$

BÀI 8. Cho ΔABC, $n \in \mathbf{Z}$. Chứng minh :

a) $\sin^2 nA + \sin^2 nB + \sin^2 nC = 2 + 2(-1)^{n+1}.\cos nA.\cos nB.\cos nC$

b) $\cos^{n} nA + \cos^2 nB + \cos^2 nC = 1 + 2(-1)^{n}.\cos nA.\cos nB.\cos nC.$

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng công thức hạ bậc : $sin^2x = \frac{1 - cos2x}{2}$ và kết quả bài 7.

BÀI 9. Cho ΔABC, $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng :

$$\tan nA + \tan nB + \tan nC = \tan nA.\tan nB.\tan nC$$

với điều kiện các hàm tan này có nghĩa.

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng công thức : $tan(x + y) = \dfrac{tan\,x + tan\,y}{1 - tan\,x\,tan\,y}$

BÀI 10. Cho ΔABC, $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng :

$$\tan(2n+1)\frac{A}{2}.\tan(2n+1)\frac{B}{2} + \tan(2n+1)\frac{B}{2}.\tan(2n+1)\frac{C}{2} +$$
$$+ \tan(2n+1)\frac{C}{2}.\tan(2n+1)\frac{A}{2} = 1$$

(với điều kiện các hàm tan này có nghĩa).

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng công thức : $tan(x + y) = \dfrac{tan\,x + tan\,y}{1 - tan\,x\,tan\,y}$

BÀI 11. Cho ΔABC, có : $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{3}$. Chứng minh : $2\sin C = \sin A + \sin B$.

■ ***Hướng dẫn :*** Ta có thể dùng công thức biến tích thành tổng :

- $2\sin x.\sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$
- $2\cos x.\cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$

BÀI 12. Cho ΔABC, thỏa : $5\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2} = 1$.

Chứng minh : $3\sin C = 2(\sin A + \sin B)$.

■ ***Hướng dẫn :*** Tương tự như bài 11.

BÀI 13. Cho ΔABC thỏa : $\cot\dfrac{A}{2}$, $\cot\dfrac{B}{2}$, $\cot\dfrac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng.

Chứng minh : $\cot\dfrac{A}{2}.\cot\dfrac{C}{2} = 3$.

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng công thức :

- *a, b, c (thứ tự) lập thành cấp số cộng* $\Leftrightarrow 2b = a + c$
- $\cot x + \cot y = \dfrac{\sin(x + y)}{\sin x \sin y}$
- $\cos(x + y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

BÀI 14. Cho ΔABC thỏa : $\sin A + \sin B + \sin C = 2\left(\sin\dfrac{C}{2} + \sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}\right)$

Chứng minh : $C = 120^\circ$.

■ ***Hướng dẫn :*** Bạn đọc lưu ý : $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(Có thể xem cách chứng minh ở bài 4)

BÀI 15. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông.}$$

■ **Chú ý :** Bạn đọc có thể xem lại bài 8.

LỜI GIẢI

BÀI 1. Vế trái $= \dfrac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \dfrac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \sin C}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \cos C + 1}$

$$= \frac{2\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right]}{2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right]} = \frac{2\cos\frac{C}{2}.2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}.2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}}$$

$$= \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2} = \text{Vế phải} \Rightarrow \text{(đpcm).}$$

BÀI 2. Ta có : $A + B + C = \pi \Rightarrow B + C = \pi - A$

$\Rightarrow \cot(B + C) = \cot(\pi - A) \Rightarrow \dfrac{\cot B.\cot C - 1}{\cot B + \cot C} = -\cot A$

$\Rightarrow \cot B.\cot C - 1 = -\cot A(\cot B + \cot C)$

$\Rightarrow \cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$

■ **Chú ý :** Khi sử dụng công thức $\tan(x + y)$ thì phải xét ΔABC với 2 trường hợp (trường hợp ΔABC vuông và trường hợp ΔABC không vuông để biết hàm tan có xác định hay không).

BÀI 3. Từ : $\cos C(\sin A + \sin B) = \sin C.\cos(A - B)$

$\Leftrightarrow -\cos(A + B).\ 2\sin\dfrac{A+B}{2}.\cos\dfrac{A-B}{2} = 2\sin\dfrac{C}{2}.\cos\dfrac{C}{2}.\cos(A - B)$

$\Leftrightarrow -\cos(A + B).\ \cos\dfrac{A-B}{2} = \sin\dfrac{C}{2}.\cos(A - B)$ (vì $\sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2} > 0$)

$\Leftrightarrow -\cos(A + B).\ \cos\dfrac{A-B}{2} = \cos\dfrac{A+B}{2}.\cos(A - B)$

$$\Leftrightarrow \left(1 - 2\cos^2\frac{A+B}{2}\right).\cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{A+B}{2}\left(2\cos^2\frac{A-B}{2} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A-B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos A + \cos B = 1.$$

■ **Chú ý :** Có thể giải cách khác, như sau :

Từ : $\cos C(\sin A + \sin B) = \sin C.\cos(A - B)$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{\cos(A-B)}{\cos C} \Leftrightarrow \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} + 1 = \frac{\cos(A-B)}{\cos C} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin C} = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{\cos C}$$

Vì : $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$

(Bạn đọc tự chứng minh hoặc xem cách chứng minh ở bài 4), nên :

$$\frac{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}{\sin C} = \frac{2\sin A.\sin B}{\cos C} \Leftrightarrow 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = \cos C$$

(Bạn đọc tự kiểm tra, xem như bài tập nhỏ).

Và vì : $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

(Xem chứng minh ở bài 5)

Suy ra : $\cos A + \cos B + \cos C - 1 = \cos C$

Vậy : $\cos A + \cos B = 1$.

BÀI 4. Ta có : $\sin(2n + 1)A + \sin(2n + 1)B + \sin(2n + 1)C$

$$= 2\sin(2n+1)\frac{A+B}{2}.\cos(2n+1)\frac{A-B}{2} + \sin(2n+1)(A+B)$$

$$= 2\sin(2n+1)\frac{A+B}{2}\left[\cos(2n+1)\frac{A-B}{2} + \cos(2n+1)\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= 2\sin(2n+1)\frac{A+B}{2}.2\cos(2n+1)\frac{A}{2}.\cos(2n+1)\frac{B}{2}$$

$$= 4\sin(2n+1)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right).\cos(2n+1)\frac{A}{2}.\cos(2n+1)\frac{B}{2}$$

$$= 4(-1)^n.\cos(2n+1)\frac{A}{2}.\cos(2n+1)\frac{B}{2}.\cos(2n+1)\frac{C}{2}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

■ **Chú ý :** Khi cho n những giá trị đặc biệt, ta có các kết quả quen thuộc :

- $n = 0$: $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$
- $n = 1$: $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = -4\cos\frac{3A}{2}.\cos\frac{3B}{2}.\cos\frac{3C}{2}$
- $n = 2$: $\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 4\cos\frac{5A}{2}.\cos\frac{5B}{2}.\cos\frac{5C}{2}$
- $n = 3$: $\sin 7A + \sin 7B + \sin 7C = -4\cos\frac{7A}{2}.\cos\frac{7B}{2}.\cos\frac{7C}{2}$

...

BÀI 5. Ta có : $\sin 2nA + \sin 2nB + \sin 2nC$

$$= 2\sin n(A + B).\cos n(A - B) + 2\sin nC.\cos nC$$

$$= 2(-1)^{n+1}\sin nC.\cos n(A - B) + 2\sin nC.\cos nC$$

$$= 2\sin nC[(-1)^{n+1}\cos n(A - B) + \cos nC]$$

$$= 2\sin nC[(-1)^{n+1}\cos n(A - B) + (-1)^{n}\cos n(A + B)]$$

$$= 2.(-1)^{n+1}.\sin nC.2\sin nA.\sin nB$$

$$= 4(-1)^{n+1}.\sin nA.\sin nB.\sin nC \quad \Rightarrow \quad \text{(đpcm)}.$$

■ **Chú ý :** Khi cho n những giá trị đặc biệt, ta có kết quả quen thuộc sau :

- $n = 1$: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A.\sin B.\sin C$
- $n = 2$: $\sin 4B + \sin 4B + \sin 4C = -4\sin 2A.\sin 2B.\sin 2C$
- $n = 3$: $\sin 6A + \sin 6B + \sin 6C = 4\sin 3A.\sin 3B.\sin 3C$
- $n = 4$: $\sin 8A + \sin 8B + \sin 8C = -4\sin 4A.\sin 4B.\sin 4C$.

BÀI 6. Ta có : $\cos(2n + 1)A + \cos(2n + 1)B + \cos(2n + 1)C$

$$= 2\cos(2n + 1)\frac{A + B}{2}.\cos(2n + 1)\frac{A - B}{2} + 1 - 2\sin(2n + 1)\frac{C}{2}$$

$$= (-1)^{n}.2\sin(2n + 1)\frac{C}{2}.\cos(2n + 1)\frac{A - B}{2} + 1 -$$

$$- 2\sin(2n + 1)\frac{C}{2}.(-1)^{n}.\cos(2n + 1)\frac{A + B}{2}$$

$$= 1 + (-1)^{n}.2\sin(2n + 1)\frac{C}{2}\left[\cos(2n + 1)\frac{A - B}{2} - \cos(2n + 1)\frac{A + B}{2}\right]$$

$$= 1 + (-1)^{n}.2\sin(2n + 1)\frac{C}{2}.2\sin(2n + 1)\frac{A}{2}.\sin(2n + 1)\frac{B}{2}$$

$$= 1 + 4(-1)^{n}\sin(2n + 1)\frac{A}{2}.\sin(2n + 1)\frac{B}{2}.\sin(2n + 1)\frac{C}{2} \quad \text{(đpcm)}.$$

■ **Chú ý :** Khi cho n giá trị đặc biệt ta có các kết quả quen thuộc sau :

- n = 0 : $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$
- n = 1 : $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1 - 4\sin\frac{3A}{2}.\sin\frac{3B}{2}.\sin\frac{3C}{2}$
- n = 2 : $\cos 5A + \cos 5B + \cos 5C = 1 + 4\sin\frac{5A}{2}.\sin\frac{5B}{2}.\sin\frac{5C}{2}$
- n = 3 : $\cos 7A + \cos 7B + \cos 7C = 1 - 4\sin\frac{7A}{2}.\sin\frac{7B}{2}.\sin\frac{7C}{2}$

...

BÀI 7. Ta có : $\cos nA + \cos nB + \cos nC$

$= 2\cos n(A + B).\cos n(A - B) + 2\cos nC - 1$

$= 2(-1)^n\cos nC.\cos n(A - B) + 2(-1)^n\cos nC.\cos n(-A + B) - 1$

$= -1 + 2(-1)^n.\cos nC[\cos n(A - B) + \cos n(A + B)]$

$= -1 + 2(-1)^n.\cos nC.2\cos nA.\cos nB$

$= -1 + 4(-1)^n.\cos nA.\cos nB.\cos nC$

■ **Chú ý :** Khi cho n những giá trị đặc biệt, ta có kết quả quen thuộc như sau :

- n = 1 : $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A.\cos B.\cos C$
- n = 2 : $\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C = -1 + 4\cos 2A.\cos 2B.\cos 2C$
- n = 3 : $\cos 6A + \cos 6B + \cos 6C = -1 - 4\cos 3A.\cos 3B.\cos 3C$.

BÀI 8.

a) Ta có : $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

Suy ra : $\sin^2 nA + \sin^2 nB + \sin^2 nC$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2nA + \cos 2nB + \cos 2nC)$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}[-1 + 4(-1)^n\cos nA.\cos nB.\cos nC]$ *(Do bài 7)*

$= 2 + 2(-1)^{n+1}.\cos nA.\cos nB.\cos nC$

b) Từ : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Nên : $\cos^2 nA + \cos^2 nB + \cos^2 nC = 3 - (\sin^2 nA + \sin^2 nB + \sin^2 nC)$

$= 3 - [2 + 2(-1)^{n+1}.\cos nA.\cos nB.\cos nC]$

$= 1 + 2(-1)^n.\cos nA.\cos nB.\cos nC$

■ **Chú ý :** Khi cho n những giá trị đặc biệt, ta có các kết quả quen thuộc sau :

- $n = 1$: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C$
  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C$
- $n = 2$: $\sin^2 2A + \sin^2 2B + \sin^2 2C = 2 - 2\cos 2A.\cos 2B.\cos 2C$
  $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2\cos 2A.\cos 2B.\cos 2C$
- $n = 3$: $\sin^2 3A + \sin^2 3B + \sin^2 3C = 2 + 2\cos 3A.\cos 3B.\cos 3C$
  $\cos^2 3A + \cos^2 3B + \cos^2 3C = 1 - 2\cos 3A.\cos 3B.\cos 3C$.

BÀI 9. Ta có : $A + B + C = \pi \Leftrightarrow B + C = \pi - A \Leftrightarrow nB + nC = n\pi - nA$

$\Rightarrow \tan(nB + nC) = \tan(n\pi - nA)$

$$\Rightarrow \frac{\tan nB + \tan nC}{1 - \tan nB.\tan nC} = -\tan nA$$

$\Rightarrow \tan nB + \tan nC = -\tan nA(1 - \tan nB.\tan nC)$

$\Rightarrow \tan nA + \tan nB + \tan nC = \tan nA.\tan nB.\tan nC$

■ **Chú ý :**

1. Khi cho n những giá trị đặc biệt, ta có các hệ thức quen thuộc :
   - $n = 1$: $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$
   - $n = 2$: $\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A.\tan 2B.\tan 2C$
   - $n = 3$: $\tan 3A + \tan 3B + \tan 3C = \tan 3A.\tan 3B.\tan 3C$

   ...

2. Khi thay : $\tan x = \dfrac{1}{\cot x}$

   (Dĩ nhiên ta phải *"ngầm hiểu"* điều kiện tanx, cotx có nghĩa), ta có ngay các kết quả *"đẹp"* sau :
   - $\cot nA.\cot nB + \cot nB.\cot nC + \cot nC.\cot nA = 1$
   - $\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$
   - $\cot 2A.\cot 2B + \cot 2B.\cot 2C + \cot 2C.\cot 2A = 1$
   - $\cot 3A.\cot 3B + \cot 3B.\cot 3C + \cot 3C.\cot 3A = 1$

   ...

   Các bài toán này cũng có thể chứng minh trực tiếp từ công thức :

$$\cot(x + y) = \frac{\cot x - 1}{\cot x + \cot y}$$

   Phần này dành cho bạn đọc, xem như những bài tập nhỏ (không khó lắm !).

BÀI 10. Ta có : $A + B + C = \pi \Rightarrow B + C = \pi - A$

$$\Rightarrow (2n + 1)\frac{B}{2} + (2n + 1)\frac{C}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2} - (2n + 1)\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\left[(2n+1)\frac{B}{2} + (2n+1)\frac{C}{2}\right] = \tan\left[n\pi + \frac{\pi}{2} - (2n+1)\frac{A}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\tan(2n+1)\frac{B}{2} + \tan(2n+1)\frac{C}{2}}{1 - \tan(2n+1)\frac{B}{2}.\tan(2n+1)\frac{C}{2}} = \cot(2n+1)\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \tan(2n+1)\frac{A}{2}\left[\tan(2n+1)\frac{B}{2} + \tan(2n+1)\frac{C}{2}\right] =$$

$$= 1 - \tan(2n+1)\frac{B}{2}.\tan(2n+1)\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \tan(2n+1)\frac{A}{2}.(2n+1)\frac{B}{2} + \tan(2n+1)\frac{B}{2}.\tan(2n+1)\frac{C}{2} +$$

$$+ \tan(2n+1)\frac{C}{2}.\tan(2n+1)\frac{A}{2} = 1$$

■ **Chú ý :**

- Cho $n = 0$, ta có : $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1$

  và : $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$

- Cho $n = 1$, ta có : $\tan\frac{3A}{2}.\tan\frac{3B}{2} + \tan\frac{3B}{2}.\tan\frac{3C}{2} + \tan\frac{3C}{2}.\tan\frac{3A}{2} = 1$

  và : $\cot\frac{3A}{2} + \cot\frac{3B}{2} + \cot\frac{3C}{2} = \cot\frac{3A}{2}.\cot\frac{3B}{2}.\cot\frac{3C}{2}$

- Tổng quát : $\cot(n+1)\frac{A}{2} + \cot(n+1)\frac{B}{2} + \cot(n+1)\frac{C}{2} =$

  $$= \cot(2n+1)\frac{A}{2}.\cot(2n+1)\frac{B}{2}.\cot(2n+1)\frac{C}{2}$$

Các bài toán này có thể chứng minh trực tiếp, từ công thức :

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$$

(Phần này dành cho bạn đọc, không khó lắm !).

BÀI 11. Từ giả thiết : $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{A-B}{2} = 4\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} = 4\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\left(\text{vì : } \sin\frac{A+B}{2} = \frac{\cos C}{2} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A + \sin B = 2\sin(A+B) = 2\sin C$$

■ **Chú ý :** Chúng ta có thể giải cách khác, như sau :

Thật vậy, ta đã biết : $\begin{cases} \tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \tan\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \end{cases}$ và $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{3}$

Nên : $\dfrac{p-c}{p} = \dfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3p - 3c = p \quad \Leftrightarrow \quad 2p = 3c$

$$\Leftrightarrow \quad a + b + c = 3c \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 2c$$

$$\Leftrightarrow \quad (2R\sin A) + (2R\sin B) = 2(2R\sin C)$$

$\Leftrightarrow \quad \sin A + \sin B = 2\sin C$ (Do định lí hàm sin).

BÀI 12. Từ giả thiết : $5\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2} = \cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad 5\cos\frac{A-B}{2} - 5\cos\frac{A+B}{2} = \cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos\frac{A-B}{2} = 6\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} = 6\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\left(\text{vì } \sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2} \neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\sin A + \sin B) = 3\sin(A+B) = 3\sin C$$

Vậy : $3\sin C = 2(\sin A + \sin B)$.

■ **Chú ý :** Cách giải khác, như sau :

Cũng từ : $5\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 5\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-a)}} = 1$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{\left(\frac{p-c}{p}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow 5(p-c) = p \Leftrightarrow 4p = 5c$$

$\Leftrightarrow 2(a+b+c) = 5c \Leftrightarrow 2(a+b) = 3c$ (Định lí hàm sin)

$\Leftrightarrow 2(\sin A + \sin B) = 3\sin C.$

BÀI 13. Từ giả thiết, nên : $2\cot\frac{B}{2} = \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\cot\frac{B}{2} = \frac{\sin\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}} \Leftrightarrow 2\cot\frac{B}{2} = \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2} = \sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} \Leftrightarrow \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{C}{2} = 3$$

■ **Chú ý :** Qua bài 11 và 13, ta nhận thấy :

$$2b = a + c \Leftrightarrow 2\cot\frac{B}{2} = \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} \Leftrightarrow \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{C}{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{C}{2} = \frac{1}{3}.$$

BÀI 14. Từ giả thiết, ta có :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\left(\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} = 2\left(\cos\frac{A+B}{2} + \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} = 2\left(\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{C}{2} = 60^o \Leftrightarrow C = 120^o.$$

BÀI 15. Ta có : $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos2A) + \frac{1}{2}(1 + \cos2B) + \cos^2C = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos2A + \cos2B) + \cos^2C = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(A + B).\cos(A - B) + \cos^2C = 0 \quad \Leftrightarrow -\cos C.\cos(A - B) + \cos^2C = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos C[-\cos(A - B) - \cos(A + B)] = 0 \quad \Leftrightarrow \cos C(-2\cos A.\cos B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos A = 0 \\ \cos B = 0 \\ \cos C = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{\pi}{2} \\ B = \dfrac{\pi}{2} \\ C = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông.}$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

16*. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

$$\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} =$$

$$= \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}.$$

17. Cho ΔABC. Chứng minh :

a) $\sin3A.\sin^3(B - C) + \sin3B.\sin^3(C - A) + \sin3C.\sin^3(A - B) = 0$

b) $\sin3A.\cos^3(B - C) + \sin3B.\cos^3(C - A) + \sin3C.\cos^3(A - B) =$

$= \sin3A.\sin3B.\sin3C.$

18. Cho ΔABC. Chứng minh :

a) $\sin^3A.\sin(B - C) + \sin^3B.\sin(C - A) + \sin^3C.\sin(A - B) = 0$

b) $\sin^3A.\cos(B - C) + \sin^3B.\cos(C - A) + \sin^3C.\cos(A - B) =$

$= 3\sin A.\sin B.\sin C.$

19. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $\tan5A + \tan5B + \tan5C = \tan5A.\tan5B.\tan5C$ với các hàm này có nghĩa.

b) $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = 2\sin A.\sin B.\sin C.(\cot A + \cot B + \cot C)$

c) $\sin^2A.\sin2B + \sin^2B.\sin2A = 2\sin A.\sin B.\sin C$

d)* $3\cot\widehat{BGM} = 2(\cot A + \cot B) - \cot C$

(trong đó G, M lần lượt là trọng tâm, trung điểm cạnh BC của tam giác).

e)* $\cot\widehat{MAB} = 2\cot A + \cot B$

f) $\dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{\sin\widehat{BAM}}{\sin\widehat{CAM}}$.

Hướng dẫn : Dùng định lí hàm sin trong 2 tam giác : ABM, ACM.

g) Nếu thêm điều kiện : $\begin{cases} \sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} \\ 2B = A + C \end{cases}$

thì $B = \dfrac{\pi}{3}$, $A = \dfrac{\pi}{5}$ đúng hay sai ? Giải thích ?

20. Cho ΔABC. Chứng minh rằng : $\dfrac{\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}} = 1$

Hướng dẫn : Bạn đọc xem lại bài 10.

21. Cho ΔABC. Chứng minh :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{B+C}{2}.\cos\frac{C+A}{2} + 1$$

Hướng dẫn : Bạn đọc xem lại bài 6.

22*. Cho ΔABC có $2\cot B = \cot A + \cot C$. Chứng minh :

$$2\sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2 C.$$

23. Cho ΔABC không vuông. Chứng minh :

a) $\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}} + \dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}} + \dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}} = 2$

b)* $\tan\dfrac{A}{4} + \tan\dfrac{B}{4} + \tan\dfrac{C}{4} + \tan\dfrac{A}{4}.\tan\dfrac{B}{4} + \tan\dfrac{B}{4}.\tan\dfrac{C}{4} + \tan\dfrac{C}{4}.\tan\dfrac{A}{4} =$

$$= 1 + \tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4}.$$

Hướng dẫn : Chú ý rằng $\tan\dfrac{A}{4} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{B+C}{4}\right)$ và công thức

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x.\tan y}$$

c) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\sin\widehat{AIB}.\sin\widehat{BIC}.\sin\widehat{CIA}$, trong đó : I là tâm hình tròn nội tiếp tam giác.

24. Cho ΔABC thỏa : $2\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin B + \sin C}{\sin A}.\sin\frac{A}{2}$

Chứng minh : $A = 60^\circ$.

25. Cho ΔABC thỏa : $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$. Chứng minh ΔABC vuông.

Hướng dẫn : Bạn đọc xem lại bài 7, 15.

26. Cho ΔABC. Chứng minh :

a) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

b) $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

c) $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - C\right) =$

$$= 1 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} - A\right).\cos\left(\frac{2\pi}{3} - B\right).\cos\left(\frac{2\pi}{3} - C\right)$$

d) $\dfrac{2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} = \cot A + \cot B + \cot C$

e) $(\sin A - \sin B)\cot\frac{C}{2} + (\sin B - \sin C)\cot\frac{A}{2} + (\sin C - \sin A)\cot\frac{B}{2} = 0$.

27. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin B.\sin C.\cos A + 2\sin C.\sin A.\cos B +$

$$+ 2\sin A.\sin B.\cos C$$

b)* Nếu thêm điều kiện : $4A = 2B = C$ thì :

i) $\dfrac{1}{\sin^2 A} + \dfrac{1}{\sin^2 B} + \dfrac{1}{\sin^2 C} = 8$

ii) $\cos A.\cos B.\cos C = -\dfrac{1}{8}$

iii) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \dfrac{5}{4}$

c) Nếu thêm điều kiện : $A = 2B$ thì : $\sin^2 A = \sin B(\sin B + \sin C)$.

Điều đảo lại có đúng không ?

d) Nếu ΔABC có thêm điều kiện là 3 góc nhọn thì :

$$\sin^2 A + \sin^2 B > \sin^2 C > |\sin^2 A - \sin^2 B|$$

e)* Nếu ΔABC cân tại $A = 20^\circ$ thì : $\sin^3 A + \sin^3 B = 3\sin A.\sin^2 B$.

Dạng 2. BÀI TẬP LIÊN HỆ GÓC VÀ CẠNH

A. CÁC HỆ THỨC LIÊN HỆ GÓC VÀ CẠNH

■ **Phương pháp chung :**

Để chứng minh dạng toán này ta cần thực hiện phép biến đổi lượng giác và các hệ thức lượng trong tam giác một cách linh hoạt.

Ví dụ : $A + B + C = \pi$ và định lí hàm sin, cos, tan, ...

Thông thường chứng minh bằng một trong hai cách sau :

- *Sử dụng điều kiện cho trước trong quá trình chứng minh.*
- *Biến đổi trực tiếp từ điều kiện cho trước đến hệ thức cần chứng minh, đôi lúc đi theo kiểu biến đổi ngược lại, biến đổi tương đương...*

BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

BÀI 28. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

Nếu cotA, cotB, cotC theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì a^2, b^2, c^2 cũng theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

■ ***Hướng dẫn :*** Bạn đọc phối hợp các công thức :

- *Định lí hàm cos, hàm sin.*
- $\cot x + \cot y = \dfrac{\sin(x+y)}{\sin x.\sin y}$.

BÀI 29. Cho ΔABC. Chứng minh :

$$2R\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}\right).$$

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng các công thức :

- $\tan x + \cot x = \dfrac{2}{\sin 2x}$ *(1)*
- $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A}{2}.\cot\dfrac{B}{2}.\cot\dfrac{C}{2}$ *(2)*
- $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

(Bạn đọc có thể xem cách chứng minh ở bài 10)

BÀI 30. Cho ΔABC. Chứng minh : $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Bạn đọc có thể dùng định lí hàm sin và $r = (p-a)\tan\dfrac{A}{2}$.

BÀI 31. Cho ΔABC. Chứng minh : $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$.

- **Hướng dẫn :** Chú ý các công thức :

  - $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$
  - $r = (p - a)\tan\frac{A}{2} = \ldots = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

BÀI 32. Cho ΔABC. Chứng minh : $S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$.

- **Hướng dẫn :** Dùng các công thức sau để chứng minh bài toán :

  - $S = \frac{1}{2}bc\sin A$
  - *Định lí hàm sin.*

BÀI 33. Cho ΔABC thỏa : $a^3 = b^3 + c^3$. Chứng minh rằng các góc của ΔABC đều nhọn.

- **Hướng dẫn :** Áp dụng định lí hàm cos : $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

BÀI 34. Cho ΔABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh :

$$IA.IB.IC = 4R.r^2.$$

- **Hướng dẫn :** Chú ý hệ thức lượng trong tam giác vuông :

$$r = IA.\sin\frac{A}{2} = IB.\sin\frac{B}{2} = IC.\sin\frac{C}{2}$$

BÀI 35. Cho ΔABC. Chứng minh : $(a - b)\cot\frac{C}{2} + (b - c)\cot\frac{A}{2} + (c - a)\cot\frac{B}{2} = 0$.

- **Hướng dẫn :** Dùng định lí hàm sin hoặc định lí hình chiếu :

$$a = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right); \quad b = r\left(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\right); \quad c = r\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\right)$$

BÀI 36. Cho ΔABC. Chứng minh : $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$.

- **Hướng dẫn :** Sử dụng các công thức về diện tích tam giác :

$$S = pr = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$$

$$= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

BÀI 37. Cho ΔABC. Chứng minh :

a) $S = \dfrac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)\tan A$ (với $A \neq \dfrac{\pi}{2}$)

b) $S = \dfrac{r^2(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{2\sin A.\sin B.\sin C}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Bạn đọc có thể dùng các công thức sau :

- *Định lí hàm sin, cos.*
- $S = pr = \dfrac{abc}{4R} = \dfrac{1}{2}bc.\sin A$

BÀI 38. Cho ΔABC. Chứng minh :

a) $\cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2} = \dfrac{a}{r}$

b) $\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{a}{r_a}$

c) $r_a = r.\cot\dfrac{B}{2}.\cot\dfrac{C}{2}$

d) $\dfrac{1}{r} = \dfrac{2}{h_a} + \dfrac{1}{r_a}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng các công thức :

- $r = (p-b)\tan\dfrac{B}{2} = (p-c)\tan\dfrac{C}{2}$
- $\begin{cases} \tan\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \\ \tan\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{cases}$ (công thức này suy ra được từ định lí hàm cos)
- $S = pr = (p-a)r_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

BÀI 39. Cho ΔABC. $B > C$, AM là trung tuyến và AD là phân giác trong.

Chứng minh : $\tan\widehat{DAM} = \tan^2\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B-C}{2}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng các định lí sau :

- *Định lí hàm sin :* $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$
- *Định lí hàm tang :* $\dfrac{b-c}{b+c} = \dfrac{\tan\dfrac{B-C}{2}}{\tan\dfrac{B+C}{2}}$

BÀI 40. Cho ΔABC có : $\dfrac{m_b}{m_c} = \dfrac{c}{b} \neq 1$. Chứng minh : $2\cot A = \cot B + \cot C$.

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng công thức trung tuyến :

- $m_b^2 = \frac{1}{4}\left[2(c^2 + a^2) - b^2\right]$
- $m_c^2 = \frac{1}{4}\left[2(a^2 + b^2) - c^2\right]$

BÀI 41. Cho ΔABC, có $A = 2B = 4C$. Chứng minh rằng : $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin.

BÀI 42. Cho ΔABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, đường thẳng d qua I cắt BC (kéo dài) và các đoạn CA, AB theo thứ tự tại A_1, B_1, C_1.

Chứng minh : $\frac{BC}{IA_1} + \frac{CA}{IB_1} = \frac{AB}{IC_1}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng tính chất đường phân giác trong các tam giác AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C.

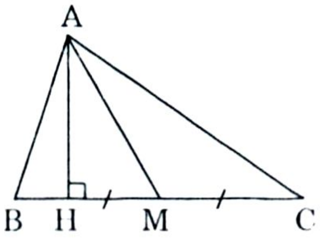
BÀI 43. Chứng minh rằng trong hình thang ABCD (AB // CD) thì :

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB.CD.$$

■ ***Hướng dẫn :***

Dùng tính chất đường trung tuyến :

$$AB^2 - AC^2 = 2\overline{BC}.\overline{MH}$$



BÀI 44. Cho ΔABC. Gọi I là tâm hình tròn nội tiếp. Chứng minh :

$$\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin và kết quả bài 10 :

$$\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1$$

BÀI 45. Cho ΔABC, $M \in AB$, $N \in AC$, $AM = AN = 1$.

a) Chứng minh : $S_{\Delta AMN} = \frac{S}{bc}$.

b) Chứng minh : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (công thức Hêrông).

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos và công thức về tứ giác nội tiếp :

$$A + C = B + D = \pi$$

BÀI 46. Cho tứ giác lồi ABCD nội tiếp đường tròn, AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, 2p = a + b + c + d. Chứng minh rằng diện tích của tứ giác là :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos và công thức về tứ giác nội tiếp :

$$A + C = B + D = \pi$$

BÀI 47. Cho ΔABC, M, N $\in$ BC, BM = MN = NC.

Đặt : $\widehat{BAM} = x$, $\widehat{MAN} = y$, $\widehat{NAC} = z$.

Chứng minh : $(\cot x + \cot y).(\cot y + \cot z) = 4(1 + \cot^2 y)$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức về diện tích tam giác : $S = \frac{1}{2}bc\sin A$

BÀI 48. Cho ΔABC, có B = 2C. Chứng minh :

a) $b^2 = ac + c^2$ b) $r = (b - c)\sin C$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin và công thức diện tích : $S = pr$

BÀI 49. Cho ΔABC. Chứng minh : $r_a + r_b + r_c = r + 4R$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng các công thức :

- $r_a = p\tan\frac{A}{2} = \ldots = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$
- $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (xem bài 30)

BÀI 50. Chứng minh :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)l_c + \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)l_a + \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)l_b = 2\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right).$$

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng công thức tính độ dài đường phân giác trong.

BÀI 51. Cho ΔABC, G là trọng tâm, đặt : $\widehat{GAB} = \alpha$, $\widehat{GBC} = \beta$, $\widehat{GCA} = \gamma$.

Chứng minh : $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \dfrac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng công thức : $\cot A = \dfrac{a^2 + c^2 - c^2}{4S}$

BÀI 52. Cho ΔABC có $a^4 + b^4 = c^4$.

a) Chứng minh : ΔABC có 3 góc nhọn.

b) Chứng minh : $2\sin^2 C = \tan A.\tan B$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos và công thức diện tích $S = \frac{1}{2}ab.\sin C$.

BÀI 53. Cho ΔABC vuông tại A. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp.

Chứng minh rằng :

a) $\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = \frac{l_b.l_c}{4a^2}$ b) $IB.IC = \frac{l_b.l_c}{2}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin.

BÀI 54. Cho ΔABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp.

Chứng minh : $\frac{IA.IB.IC}{a.b.c} = \frac{r}{p}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin và công thức diện tích

$$S = pr = \frac{abc}{4R}$$

BÀI 55. Cho tứ giác lồi ABCD nội tiếp đường tròn. Chứng minh rằng :

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}},$$

trong đó : AB = a, BC = b, CD = c, DA = d và 2p = a + b + c + d.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos.

BÀI 56. Cho ΔABC, đường phân giác trong AD, trung tuyến BM và đường cao CH đồng quy tại I.

Chứng minh rằng : $(\sin B + \sin C)\cos B = \sin C\sqrt{\cos^2 B + \sin^2 C}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng các định lí hàm sin và Xêva.

Bài 57. Cho ΔABC. CM, CN là 2 trung tuyến. Chứng minh rằng :

$$BM \perp CN \Leftrightarrow \cot A = 2(\cot B + \cot C).$$

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng các định lí hàm sin, cos hoặc công thức :

$$\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$

BÀI 58. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 45^o$, kéo dài BC và phía B một đoạn BB' và về phía C một đoạn CC' sao cho BB' = CC' = a. Đặt $\alpha = \widehat{BAB'}$, $\beta = \widehat{CAC'}$. Chứng minh : $(1 + \cot\alpha)(1 + \cot\beta) = 8$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí về diện tích tam giác : $S = \frac{1}{2}bc\sin A$

BÀI 59. Cho ΔABC. Gọi I, O lần lượt là tâm đường tròn nội, ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng : $OI^2 = r^2 - 2Rr$ (công thức Euler).

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức phương tích của điểm I đối với đường tròn tâm O.

BÀI 60. Cho ΔABC. Gọi O, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm tam giác. Chứng minh : $OG^2 = R^2 - \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức Leibnitz :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

BÀI 61. Cho ΔABC. Gọi I, G lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, trọng tâm tam giác. Chứng minh rằng : $IG^2 = \dfrac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức Leibnitz và kết quả bài 30.

BÀI 62. Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O), M tùy ý trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$.

a) Chứng minh rằng : $MA = MB + MC$.

b) Chứng minh rằng biểu thức : $S = MA^4 + MB^4 + MC^4$ không phụ thuộc vào M.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin và định lí hàm cos.

BÀI 63. a) Cho ΔABC. Chứng minh :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C \quad (1)$$

b) Ngược lại : Cho 3 góc A, B, C nhọn bất kì thỏa (1).

Chứng minh rằng : $A + B + C = \pi$ (tức là 3 góc của một tam giác).

c) Cho ΔABC. Chứng minh : $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos A.\cos B.\cos C)$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức hạ bậc : $cosx^2 = \dfrac{1 + cos2x}{2}$ và định lí hàm sin.

BÀI 64. Cho ΔABC với $a > b > c$.

a) Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{\cos\frac{A}{2}}{l_a} + \dfrac{\cos\frac{B}{2}}{l_b} + \dfrac{\cos\frac{C}{2}}{l_c}$.

b) Chứng minh rằng : Nếu $l_a = l'_a$ thì $B - C = \dfrac{\pi}{2}$.

- ■ ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức về độ dài của đường phân giác trong :

$$l_a = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

BÀI 65. Cho ΔABC. Đường tròn nội tiếp của tam giác tiếp xúc với các cạnh tam giác tại A', B', C' (đối diện A, B, C tương ứng). Chứng minh :

a) $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\right)$

b) $\frac{S'}{S} = 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$ với $S = S_{\Delta A'B'C'}$, B'C' = a', C'A' = b', A'B' = c'.

- ■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin.

BÀI 66. Cho ΔABC. Chứng minh :

$$\frac{a.\sin A + b.\sin B + c.\sin C}{a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C} = \cot A + \cot B + \cot C.$$

- ■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin và công thức lượng giác :

$$\cot x + \cot y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$$

BÀI 67. Cho ΔABC. Chứng minh :

$$(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a + b + c.$$

- ■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hình chiếu trong tam giác :

$$\begin{cases} a = b\cos C + c\cos B \\ b = c\cos A + a\cos C \\ c = a\cos B + b\cos A \end{cases}$$

BÀI 68. Cho ΔABC có a, b, c lập thành cấp số cộng. Chứng minh : ac = 6Rr.

- ■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng các công thức :

  - *a, b, c lập thành cấp số cộng* $\Leftrightarrow 2b = a + c$
  - $S = pr = \frac{abc}{4R}$

BÀI 69. Cho ΔABC có $m_a = m_b$. Chứng minh a = b.

- ■ ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức trung tuyến : $m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$...

BÀI 70. Cho ΔABC có $l_a = l_b$. Chứng minh a = b. (Định lí Steiner – Lehmus).

BÀI 71. Cho ΔABC. $D \in$ đoạn BC, $AD = d$, $BD = m$, $CD = n$.

Chứng minh : $ad^2 = mb^2 + nc^2 - am.n$ (định lí Schwart).

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos.

BÀI 72. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $(b + c)l_a + (c + a)l_b + (a + b)l_c = 2\left(\sqrt{(p - a)bc} + \sqrt{(p - b)ca} + \sqrt{(p - c)ab}\right)\sqrt{p}$

b) $\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)l_a + \left(\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}\right)l_b + \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)l_c = 2\left(\sqrt{\dfrac{p - a}{bc}} + \sqrt{\dfrac{p - b}{ca}} + \sqrt{\dfrac{p - c}{ab}}\right)\sqrt{p}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức về độ dài của đường phân giác trong :

$$l_a = \frac{2}{b + c}\sqrt{bcp(p - a)}$$

BÀI 73. Cho ΔABC nhọn, H là trực tâm. Chứng minh rằng các tam giác ABC, ABH, BCH, CAH có các bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng nhau.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin trong các tam giác HBC, HCA, HAB, ABC.

BÀI 74. Cho ΔABC cân tại B. Đường thẳng d cắt các đoạn BA tại M, BC tại N và đường cao BH tại O. Chứng minh : $\dfrac{HO}{BO} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{AM}{BM} + \dfrac{CN}{BN}\right)$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức về diện tích tam giác : $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$ và công thức về độ dài của đường phân giác trong $l_a = \dfrac{2bc.\cos\dfrac{A}{2}}{b + c}$

BÀI 75. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

$$\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} =$$

$$= \frac{r}{4R} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Đây là bài toán mang tính tổng hợp của bài 16 và bài 30.

BÀI 76. Cho tứ giác lồi ABCD nội tiếp. Chứng minh :

a) $AC.BD = AB.CD + BC.AD$

b) $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AB.AD + BC.CD}{AB.BC + AD.DC}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos và công thức về tứ giác nội tiếp :

$$A + C = B + D = 180^\circ.$$

LỜI GIẢI

BÀI 28. Từ giả thiết, suy ra : $2\cot B = \cot A + \cot C$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cot B = \frac{\sin(A+C)}{\sin A.\sin C} = \frac{\sin B}{\sin A.\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos B.\sin A.\sin C = \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{c}{2R} = \left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2+a^2-b^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad c^2+a^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow \quad (\text{đpcm}).$$

■ **Chú ý :** Có thể giải cách khác như sau :

Theo *hệ quả 2* : (của định lí cos)

$$\cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}, \qquad \cot B = \frac{c^2+a^2-b^2}{4S}, \qquad \cot C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Vì vậy : $2\cot B = \cot A + \cot C$

$$\Leftrightarrow \quad 2\frac{c^2+a^2-b^2}{4S} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(c^2+a^2-b^2) = (b^2+c^2-a^2)+(a^2+b^2-c^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(c^2+a^2-b^2) = 2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad c^2+a^2 = 2b^2.$$

BÀI 29.

- *Chứng minh (1) :*

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\tan x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{\sin x.\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

- *Chứng minh (2) :*

Do : $A + B + C = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$

$$\Rightarrow \quad \cot\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right) = \tan\frac{A}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}-1}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}} = \frac{1}{\cot\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$$

Quay lại bài toán :

$$\text{Vế phải} = \frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\tan\frac{B}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{2R}{a} + \frac{2R}{b} + \frac{2R}{c}$$

$$= 2R\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \text{Vế trái} \quad \Rightarrow \quad \text{(đpcm).}$$

BÀI 30.

- *Cách 1 :*

$$r = (p - a) = R(\sin B + \sin C - \sin A).\tan\frac{A}{2} \quad \text{(Do định lí hàm sin)}$$

$$= R\left(2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}\right).\tan\frac{A}{2}$$

$$= 2R\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$= 2R\cos\frac{A}{2}.2\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = 4R\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

$\Rightarrow$ (đpcm).

- *Cách 2 :* Dùng định lí hình chiếu :

$$a = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2R\sin A = r\frac{\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}r$$

$$\Leftrightarrow \quad 4R\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2} = \frac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad r = 4R.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

- *Cách 3 :* Ta có : $S = pr = \frac{abc}{4R} \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b+c}{2}.r = \frac{abc}{4R}$

$$\Rightarrow \quad R(\sin A + \sin B + \sin C) = \frac{(2R\sin A)(2R\sin B)(2R\sin C)}{4R}$$

$$\Rightarrow \quad r.4R\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} = 2R^2.\sin A.\sin B.\sin C$$

(vì $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$. Bạn đọc tự chứng minh hoặc xem lời giải ở bài 4).

Mặt khác : sin2x = 2sinx.cosx (công thức nhân 2)

Nên : $r = 4R\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$.

- *Cách 4 :*

$$+\quad r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \qquad (1)$$

$$+\quad 4R\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = 4.\frac{abc}{4S}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}.\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$= \frac{abc}{S}\cdot\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

$$= \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ $r = 4R\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$.

BÀI 31. Theo bài 6 và bài 30 :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = 1 + \frac{r}{R}$$

■ **Chú ý :** Khi đi thi các hệ thức sau phải chứng minh lại :

- $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$
- $r = 4R\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$.

BÀI 32. Theo định lí hàm sin :

$$\frac{1}{4}(a^2\sin2B + b^2\sin2A) = \frac{1}{4}(4R^2\sin^2A.\sin2B + 4R^2\sin^2B.\sin2A)$$

$$= R^2(\sin^2A.\sin2B + \sin^2B.\sin2A)$$

$$= R^2(\sin^2A.2\sin B.\cos B + \sin^2B.2\sin A.\cos A)$$

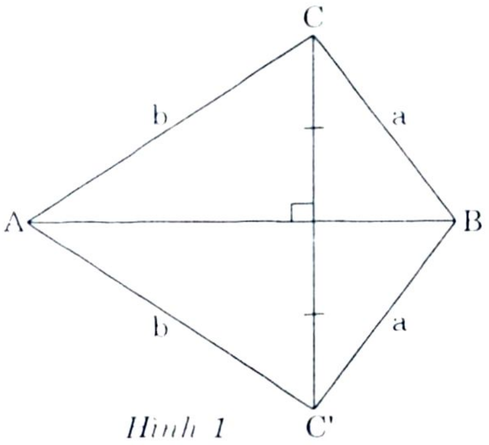
$$= 2R^2\sin A.\sin B.\sin(A+B)$$

$$= 2R^2\sin A.\sin B.\sin C$$

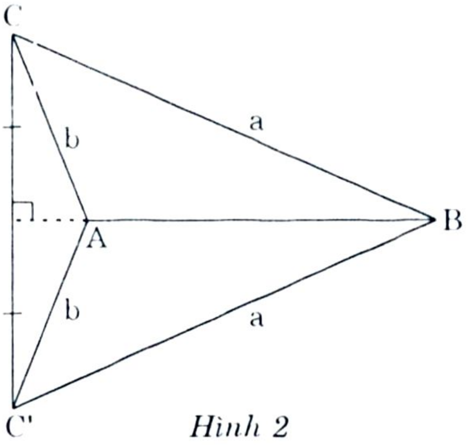
$$= \frac{1}{2}(2R\sin B)(2R\sin C).\sin A = \frac{1}{2}bc.\sin A = S$$

Vậy : $S = \frac{1}{4}(a^2\sin2B + b^2\sin2A)$.

■ **Chú ý :** Xét cách dựng thêm (ở hình vẽ)



Hình 1



Hình 2

- *Xét* (H_1) :

Ta có : $2S = S_{CACB} = S_{ACAC'} + S_{ACBC'} = \frac{1}{2}b^2\sin 2A + \frac{1}{2}a^2\sin 2B$

$\Rightarrow \quad 2S = \frac{1}{2}(b^2\sin 2A + a^2\sin 2B)$

$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$

- *Xét* (H_2) : $2S = S_{ACBC'} - S_{ACAC'} = \frac{1}{2}a^2\sin 2B - \frac{1}{2}b^2\sin(2\pi - 2A)$

$= \frac{1}{2}a^2\sin 2B + \frac{1}{2}b^2\sin 2A = \frac{1}{2}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$

$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$

Tóm lại trong 2 trường hợp ta đều có : $S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$.

BÀI 33.

■ ***Nhận xét :*** Ta xét bài toán tổng quát :

"Cho ΔABC có $a^n = b^n + c^n$, $n > 2$ thì ΔABC có 3 góc đều nhọn".

Từ giả thiết : $a^n = b^n + c^n$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^n > b^n \\ a^n > c^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A > B \\ A > C \end{cases} \Rightarrow \text{B, C là các góc nhọn.}$$

Vì vậy, ta còn chứng minh A nhọn nữa là xong. Quả vậy :

$$a^n = b^n + c^n = b^2.b^{n-2} + c^2.c^{n-2} < b^2.a^{n-2} + c^2.a^{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad a^n < (b^2 + c^2)a^{n-2} \quad \Rightarrow \quad a^2 < b^2 + c^2 = a^2 + 2bc.\cos A$$

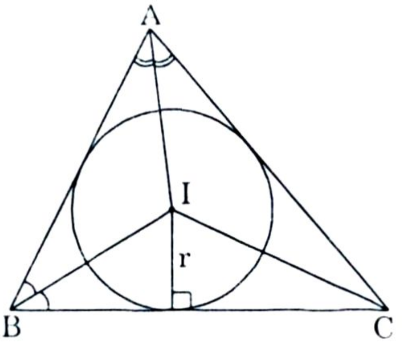
$$\Rightarrow \quad 0 < \cos A \quad \Rightarrow \quad \text{A nhọn.}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

■ **Chú ý :** Lấy n = 3, ta có kết quả bài toán cần tìm.

BÀI 34.

Ta có : $\begin{cases} IA = \dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}} \\ IB = \dfrac{r}{\sin\dfrac{B}{2}} \\ IC = \dfrac{r}{\sin\dfrac{C}{2}} \end{cases}$



Vậy : $IA.IB.IC = \dfrac{r^3}{\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}} = \dfrac{r^3}{\dfrac{r}{4R}} = 4Rr^2 \Rightarrow$ (đpcm).

BÀI 35. Theo định lí hàm sin :

$$(a - b)\cot\frac{C}{2} = 2R(\sin A - \sin B)\cot\frac{C}{2}$$

$$= 4R\cos\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A-B}{2}.\cot\frac{C}{2}$$

$$= 4R\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A-B}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{A+B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}$$

$$= 4R.\sin\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A-B}{2} = 2R(\cos B - \cos A)$$

Chứng minh tương tự : $(b - c)\cot\dfrac{A}{2} = 2R(\cos C - \cos B)$

$$(c - a)\cot\frac{B}{2} = 2R(\cos A - \cos C)$$

Vậy : $(a - b)\cot\dfrac{C}{2} + (b - c)\cot\dfrac{A}{2} + (c - a)\cot\dfrac{B}{2} = 0$.

- **Chú ý :** Ta có thể giải cách khác như sau :

Theo định lí hình chiếu :

$$a = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right); \quad b = r\left(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\right); \quad c = r\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\right)$$

Do đó : $(a - b)\cot\dfrac{C}{2} = r\left(\cot\dfrac{B}{2} - \cot\dfrac{A}{2}\right)\cot\dfrac{C}{2}$ (1)

$$(b-c)\cot\frac{A}{2} = r\left(\cot\frac{C}{2} - \cot\frac{B}{2}\right)\cot\frac{A}{2} \qquad (2)$$

$$(c-a)\cot\frac{B}{2} = r\left(\cot\frac{A}{2} - \cot\frac{C}{2}\right)\cot\frac{B}{2} \qquad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) vế với vế ta được kết quả bài toán.

BÀI 36. Ta có :

$$S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

Suy ra : $\begin{cases} \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{p-a}{S}, & \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{a}{2S} \\ \dfrac{1}{r_b} = \dfrac{p-b}{S}, & \dfrac{1}{h_b} = \dfrac{b}{2S} \\ \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{p-c}{S}, & \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{c}{2S} \end{cases}$

Vậy : $\begin{cases} \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{p}{S} = \dfrac{1}{r} \\ \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{a+b+c}{2S} = \dfrac{2p}{2S} = \dfrac{1}{r}. \end{cases}$

BÀI 37.

a) Theo định lí hàm cos :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = b^2 + c^2 - 4\left(\frac{1}{2}bc.\sin A\right)\frac{\cos A}{\sin A} = b^2 + c^2 - 4S.\cot A$$

$$\Rightarrow \quad S.\cot A = b^2 + c^2 - a^2 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)\tan A.$$

b) Ta có :

$$\text{Vế phải} = \frac{r^2(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{2\sin A.\sin B.\sin C} = \frac{r^2\left(\dfrac{a+b+c}{2R}\right)^2}{2\dfrac{abc}{8R^3}} = Rr^2\frac{(a+b+c)^2}{abc}$$

$$\text{Vế phải} = Rr^2\frac{(2p)^2}{abc} = \frac{4R}{abc}(pr)^2 = \frac{1}{S}.S^2 = S = \text{vế trái} \Rightarrow \quad \text{(đpcm).}$$

BÀI 38.

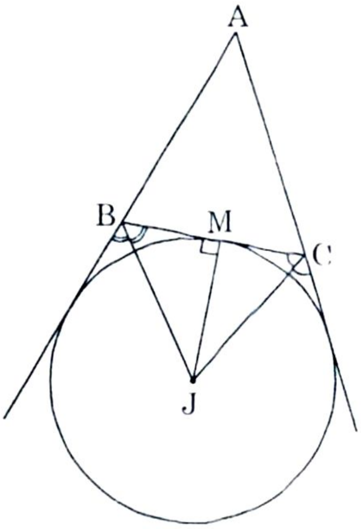
a) Ta có : $r = (p-b).\tan\dfrac{B}{2} = (p-c)\tan\dfrac{C}{2}$

$$\Rightarrow \quad \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \frac{b-b}{r} + \frac{p-c}{r} = \frac{a}{r}.$$

b) Từ : $\begin{cases} \tan\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \\ \tan\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{p-a}\,(p-b+p-c)}{\sqrt{p(p-b)(p-c)}} = \frac{a(p-a)}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$= \frac{a.\dfrac{S}{r_a}}{S} = \frac{a}{r_a}$$



- *Cách khác :*

Ta có : $a = BC = BM + MC$

$= r_a(\cot\widehat{JBC} + \cot\widehat{JCB})$

$= r_a\left(\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \frac{a}{r_a}.$$

c) Ta có : $\tan\dfrac{B}{2}.\tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{p-a}{p} = \dfrac{r}{r_a}\cdot\dfrac{(p-a)r_a}{pr} = \dfrac{r}{r_a}\cdot\dfrac{S}{S} = \dfrac{r}{r_a}$

$$\Rightarrow \quad r_a = r.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$$

- *Cách khác :* Ta có : $a = r_a\left(\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\right) = r\left(\cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{r_a.\sin\dfrac{B+C}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}} = r.\frac{\sin\dfrac{B+C}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}}$$

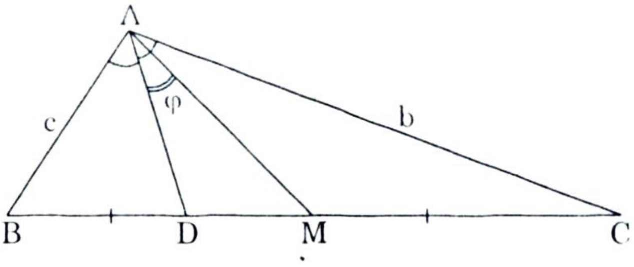
$$\Rightarrow \quad r_a = r.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2} \qquad \left(\text{vì } \sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2} \neq 0\right).$$

d) Ta có : $S = pr = (p-a)r_a = \dfrac{1}{2}ah_a \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{r} = \dfrac{p}{S} \\ \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{p-a}{S} \\ \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{a}{2S} \end{cases}$

Vậy : $\dfrac{2}{h_a} + \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{a}{S} + \dfrac{p-a}{S} = \dfrac{p}{S} = \dfrac{1}{r}.$

BÀI 39. Đặt : $\widehat{DAM} = \varphi$. Xét hai ΔAMB, ΔAMC.

Theo định lí hàm sin :



$$\frac{BM}{AM} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2} + \varphi\right)}{\sin B};$$

$$\frac{CM}{AM} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2} - \varphi\right)}{\sin C}$$

Suy ra : $$\frac{\sin\left(\frac{A}{2} + \varphi\right)}{\sin B} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2} - \varphi\right)}{\sin C} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\left(\frac{A}{2} + \varphi\right) - \sin\left(\frac{A}{2} - \varphi\right)}{\sin\left(\frac{A}{2} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{A}{2} - \varphi\right)} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\tan\dfrac{\left(\frac{A}{2} + \varphi\right) - \left(\frac{A}{2} - \varphi\right)}{2}}{\tan\dfrac{\left(\frac{A}{2} + \varphi\right) + \left(\frac{A}{2} - \varphi\right)}{2}} = \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\tan\varphi}{\tan\frac{A}{2}} = \tan\frac{B-C}{2}.\tan\frac{A}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan\varphi = \tan\frac{B-C}{2}.\tan^2\frac{A}{2}$$

■ **Chú ý :** Bạn đọc có thể biến đổi (1) theo cách khác, như sau :

$$(1) \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{A}{2} + \varphi\right).\sin C = \sin\left(\frac{A}{2} - \varphi\right)\sin B$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sin\frac{A}{2} + \sin\varphi.\cos\frac{A}{2}\right)\sin C = \left(\sin\frac{A}{2}.\cos\varphi - \sin\varphi.\cos\frac{A}{2}\right)\sin B$$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{A}{2}\cos\varphi(\sin B - \sin C) = \sin\varphi.\cos\frac{A}{2}(\sin C + \sin B)$$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{A}{2}(\sin B - \sin C) = \tan\varphi(\sin C + \sin B)$$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{A}{2}.2\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2} = \tan\varphi.2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{A}{2}.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B-C}{2} = \tan\varphi.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\varphi = \tan\frac{A}{2}\cdot\frac{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2}} = \tan^2\frac{A}{2}.\tan\frac{B-C}{2} \quad \Rightarrow \text{(đpcm)}.$$

BÀI 40. Giả thiết suy ra : $b^2.m_b^2 = c^2.m_c^2$

$$\Leftrightarrow \quad b^2.\frac{1}{4}[2(c^2 + a^2) - b^2] = c^2.\frac{1}{4}[2(a^2 + b^2) - c^2]$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(b^2c^2 + a^2b^2) - b^4 = 2(c^2a^2 + b^2c^2) - c^4$$

$$\Leftrightarrow \quad b^4 - c^4 = 2a^2(b^2 - c^2) \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 = 2a^2 \quad (\text{vì } b \neq c)$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 - a^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2bc.\cos A = a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(2R\sin B)(2R\sin C)\cos A = (2R\sin A)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin B.\sin C.\cos A = \sin^2 A$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{\sin B.\sin C} = \frac{\sin(B + C)}{\sin B.\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cot A = \cot B + \cot C$$

$$\Rightarrow \quad \text{(đpcm)}.$$

■ **Chú ý :** Bạn đọc có thể trình bày theo cách khác :

Ta đã biết : $\begin{cases} \cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \\ \cot B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} \\ \cot C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} \end{cases}$

Vì vậy : $\cot B + \cot C = \dfrac{2a^2}{4S} = \dfrac{a^3}{2S}$

Và : $\cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} = \dfrac{2a^2 - a^2}{4S} = \dfrac{a^2}{4S}$

Nên : $\cot B + \cot C = 2\cot A$.

BÀI 41.

- *Cách 1 :* Do : $A = 2B = 4C \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{4\pi}{7} \\ B = \dfrac{2\pi}{7} \\ C = \dfrac{\pi}{7} \end{cases}$

Theo định lí hàm sin :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right)=\frac{1}{2R}\left(\frac{\sin A+\sin B}{\sin A.\sin B}\right)=\frac{\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}{R.\sin A.\sin B}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}}{R.\sin\frac{4\pi}{7}.\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{R.\sin\frac{2\pi}{7}}\quad\left(\text{vì : }\frac{3\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}=\pi\right)$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{R.2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2R.\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2R.\sin C}=\frac{1}{c}$$

Vậy : $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

- *Cách 2 :* Trước hết ta cần bổ đề sau :

"Cho ΔABC, $A = 2B$ thì : $a^2 = b^2 + bc$"

(Phần chứng minh dành cho bạn đọc)

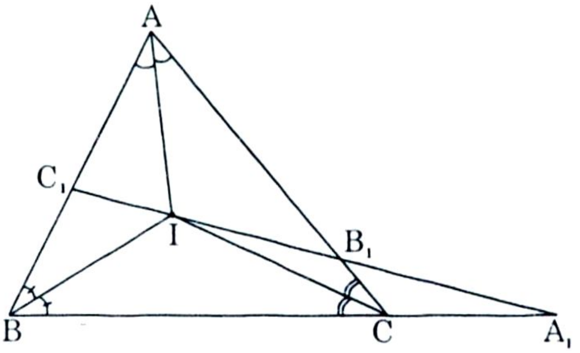
Quay lại bài toán, áp dụng bổ đề :

- Với $A = 2B \Rightarrow a^2 = b^2 + bc$
- Với $B = 2C \Rightarrow b^2 = c^2 + ca$

$$\Rightarrow \quad a^2 = c^2 + ca + bc = c(a + b + c)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c}=\frac{a+b+c}{a^2}=\frac{1}{a}+\frac{b+c}{a^2}=\frac{1}{a}+\frac{b+c}{b^2+bc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\quad\Rightarrow\text{(đpcm).}$$

BÀI 42.



- Xét ΔAB_1C_1 : $\frac{AB_1}{IB_1}=\frac{AC_1}{IC_1}$ (1)
- Xét ΔA_1BC_1 : $\frac{A_1B}{IA_1}=\frac{BC_1}{IC_1}$ (2)
- Xét ΔA_1B_1C : $\frac{B_1C}{IB_1}-\frac{CA_1}{IA_1}=0$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra :

$$\frac{AB_1+B_1C}{IB_1}+\frac{A_1B-CA_1}{IA_1}=\frac{AC_1+BC_1}{IC_1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AC}{IB_1}+\frac{BC}{IA_1}=\frac{AB}{IC_1}\ \text{(đpcm).}$$

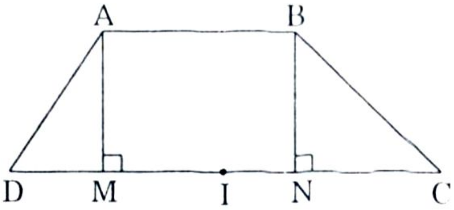
BÀI 43. Ta có : $AC^2 + BD^2 - (AD^2 + BC^2)$

$$= (AC^2 - AD^2) + (BD^2 - BC^2)$$

$$= 2\overline{CD}.\overline{IM} + 2\overline{IN}.\overline{DC}$$

$$= 2\overline{CD}(\overline{IM} + \overline{NI})$$

$$= 2\overline{CD}.\overline{NM} = 2CD.NM = 2CD.AB \quad \text{(I trung điểm DC)}$$



Vậy : $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$

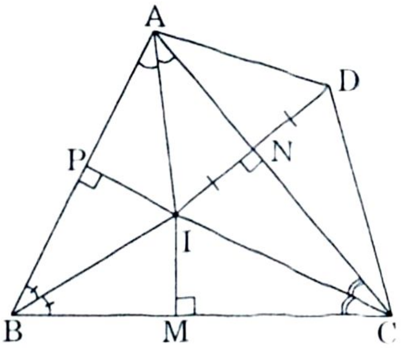
■ **Chú ý :** Trong tứ giác bất kì : $MN \le AB$.

Nên : $AC^2 + BD^2 - (AD^2 + BC^2) = 2CD.NM \le 2CD.AB$

$\Leftrightarrow$ $AC^2 + BD^2 \le AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ AB // CD.

BÀI 44.



- *Cách 1 :* Gọi D là điểm đối xứng của I qua AC.

Ta có : $$\frac{S_{\Delta ADI}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AD.AI\sin A}{\frac{1}{2}bc.\sin A} = \frac{IA^2}{bc}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{IA^2}{bc} = \frac{S_{\Delta ADI}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{ANID}}{S}$$

Chứng minh tương tự : $\dfrac{IB^2}{ca} = \dfrac{S_{BMID}}{S}$; $\dfrac{IC^2}{ab} = \dfrac{S_{CNIM}}{S}$

Vậy : $$\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1.$$

- *Cách 2 :* Theo định lí hàm sin (trong ΔABI)

$$\frac{IA}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{C}{\sin\widehat{AIB}} \quad \Rightarrow \quad IA = \frac{c.\sin\frac{B}{2}}{\sin\left(\pi - \frac{A+B}{2}\right)} = \frac{c.\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

Và trong ΔICA : $$\frac{IA}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{b}{\sin\widehat{AIC}} = \frac{b}{\cos\frac{B}{2}} \quad \Rightarrow \quad IA = \frac{b.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

Vì vậy : $IA^2 = bc.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{IA^2}{bc} = \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}$

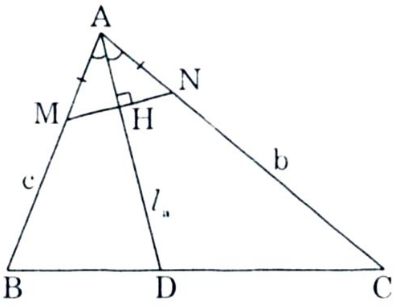
Chứng minh tương tự :

$$\frac{IB^2}{ca} = \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} \ ; \qquad \frac{IC^2}{ab} = \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}$$

Mặt khác : $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1$ (Do bài 10)

Vậy : $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1.$

BÀI 45.



a) Ta có : $$\frac{S_{\Delta AMN}}{S} = \frac{\frac{1}{2}AM.AN.\sin A}{\frac{1}{2}bc.\sin A} = \frac{1}{bc}$$

$$\Rightarrow \quad S_{\Delta AMN} = \frac{S}{bc}.$$

b) ■ **Chú ý :** Công thức Hêrông đã được chứng minh rất kĩ ở phần lí thuyết, ở đây chúng tôi giới thiệu cách chứng minh khác như sau :

$$MN = 2MH = 2.AM.\sin\frac{A}{2} = 2\sin\frac{A}{2}$$

$$AH = AM.\cos\frac{A}{2} = \cos\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AH.MN = \sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$= \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$$

Vì vậy : $S = bc.S_{\Delta AMN} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

■ **Chú ý :** Trong cách chứng minh này, phải sử dụng đến hai công thức :

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \ ; \qquad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

được giới thiệu ở phần lí thuyết.

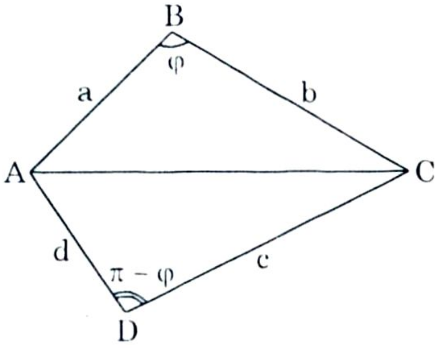
BÀI 46. Theo định lí hàm cos :

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = c^2 + d^2 - 2cd.\cos(\pi - \varphi)$$

$$= c^2 + d^2 + 2cd.\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad 2(ab + cd)\cos\varphi = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad 4(ab+cd)^2\sin^2\varphi &= 4(ab+cd)^2 - 4(ab+cd)^2\cos^2\varphi\\ &= 4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2\\ &= (2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2).\\ &\qquad .(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)\\ &= [(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]\\ &= (a+b+c-d).(a+b-c+d).\\ &\qquad .(c+d+a-b).(c+d-a+b)\\ &= 2(p-d)2(p-c)2(p-b)2(p-a)\\ &= 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)\end{aligned}$$



$$\Rightarrow\quad \left[\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\varphi\right]^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) \qquad (1)$$

Mặt khác : $S = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}ab.\sin\varphi + \frac{1}{2}cd.\sin\varphi$

$$= \frac{1}{2}(ab+cd)\sin\varphi \qquad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \quad S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$

- **Chú ý :** Trong trường hợp ABCD là tứ giác lồi bất kì, thì :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd.\cos^2\frac{B+D}{2}}$$

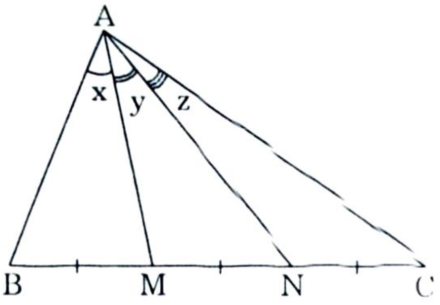
Phần chứng minh dành cho bạn đọc.

BÀI 47.

Đặt : $S_{\Delta AMB} = S_{\Delta AMN} = S_{\Delta ANC} = \alpha > 0$

$$\text{Vế trái} = \frac{\sin(x+y)}{\sin x.\sin y}\cdot\frac{\sin(y+z)}{\sin y.\sin z} = \frac{\sin(x+y).\sin(y+z)}{\sin x.\sin z.\sin^2 y}$$

$$= (1+\cot^2 y)\frac{\sin(x+y).\sin(y+z)}{\sin x.\sin z}$$



$$= (1+\cot^2 y)\frac{\dfrac{S_{\Delta ABN}}{AB.AN}\cdot\dfrac{S_{\Delta AMC}}{AM.AC}}{\dfrac{S_{\Delta ABM}}{AB.AM}\cdot\dfrac{S_{\Delta ANC}}{AC.AN}}$$

$$= (1+\cot^2 y)\frac{2\alpha.2\alpha}{\alpha.\alpha}$$

$$= 4(1+\cot^2 y) = \text{Vế phải.}$$

BÀI 48.

a) Theo định lí hàm sin : $b^2 - c^2 = 4R^2(\sin^2B - \sin^2C)$

$$= 4R^2\left[\frac{1}{2}(1 - \cos2B) - \frac{1}{2}(1 - \cos2C)\right]$$

$$= 2R^2(\cos2C - \cos2B)$$

$$= 2R^2.2\sin(C + B).\sin(B - C) = 4R^2.\sin A.\sin C$$

$$= (2R\sin A)(2R\sin C) = ac$$

$\Rightarrow \quad b^2 = c^2 + ac.$

b) Ta có : $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\frac{1}{2}ab.\sin C}{\frac{1}{2}(a + b + c)} = \dfrac{ab.\sin C}{a + b + c} = \dfrac{ab.\sin C}{\frac{ac + c^2}{c} + b} = \dfrac{ab.\sin C}{\frac{b^2}{c} + b}$

$$= \frac{ac.\sin C}{b + c} = \frac{ac(b - c)\sin C}{b^2 - c^2} = \frac{ac(b - c)\sin C}{ac} = (b - c)\sin C$$

$\Rightarrow \quad$ (dpcm).

BÀI 49. Ta có : $r_a = p\tan\dfrac{A}{2} = R(\sin A + \sin B + \sin C)\tan\dfrac{A}{2}$

$$= 4R\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}$$ (Bạn đọc xem lại bài 4)

$$= 4R\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

Chứng minh tương tự : $r_b = 4R\sin\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}.\cos\dfrac{A}{2}$

$$r_c = 4R\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}$$

và : $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$ (Bạn đọc xem lại bài 30)

$$\Rightarrow \quad r_a + r_b + r_c - r = 4R\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} + \right.$$

$$\left. + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 4R\left[\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\right]$$

$$= 4R\left[\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B+C}{2}\right]$$

$$= 4R\left(\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\right) = 4R \quad \Rightarrow \quad \text{(đpcm)}.$$

BÀI 50. Ta có : $l_a = \dfrac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c} \Leftrightarrow \dfrac{b+c}{bc}l_a = 2\cos\dfrac{A}{2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)l_c = 2\cos\dfrac{A}{2}$

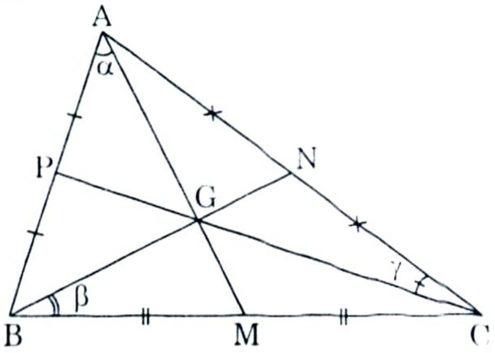
Chứng minh tương tự :

$$\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)l_b = 2\cos\frac{B}{2}; \qquad \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)l_c = 2\cos\frac{C}{2}$$

Vậy : $\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)l_a + \left(\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}\right)l_b + \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)l_c = 2\left(\cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2}\right).$

$\Rightarrow$ (đpcm).

BÀI 51. Sử dụng công thức : $\cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - c^2}{4S}$



Ta có : $S_{\Delta GAB} = S_{\Delta GBC} = S_{\Delta GCA} = \dfrac{S}{3}$

Nên : $\cot\alpha = \dfrac{AB^2 + GA^2 - GB^2}{4.\frac{1}{3}S}$

$$= \frac{3}{4S}(c^2 + GA^2 - GB^2)$$

Chứng minh tương tự : $\cot\beta = \dfrac{3}{4S}(a^2 + GB^2 - GC^2)$

$$\cot\gamma = \frac{3}{4S}(b^2 + GC^2 - GA^2)$$

Vậy : $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \dfrac{3}{4S}(a^2 + b^2 + c^2) \quad \Rightarrow \quad$ (đpcm).

BÀI 52.

a) Ta có : $c^4 = a^4 + b^4 \quad \Rightarrow \begin{cases} c^4 > a^4 \\ c^4 > b^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c > a \\ c > b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c > A \\ c > B \end{cases} \Rightarrow$ A, B nhọn.

Mặt khác : $c^4 = a^2.a^2 + b^2.b^2 < a^2.c^2 + b^2.c^2$

$\Rightarrow \quad c^4 < c^2(a^2 + b^2) \quad \Rightarrow \quad c^2 < a^2 + b^2$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 - 2ab\cos C < a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad \cos C > 0 \quad \Rightarrow$ C nhọn.

Vậy : A, B, C đều nhọn.

b) Từ giả thiết : $c^4 = a^4 + b^4$

và : $\begin{cases} \cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \\ \cot B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} \end{cases}$

Nên : $\cot A.\cot B = \dfrac{c^4 - (a^4 + b^4 - 2a^2b^2)}{16S^2} = \dfrac{2a^2b^2}{16\left(\dfrac{1}{2}ab.\sin C\right)^2} = \dfrac{1}{2\sin^2 C}$

$\Rightarrow \quad \tan A.\tan B = 2\sin^2 C \quad \Rightarrow$ (đpcm).

■ **Chú ý :** Cách khác cho câu b). Ta dùng định lí hàm cos và sin phối hợp.

Từ : $\tan A.\tan B = 2\sin^2 C \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos A.\cos B = \dfrac{\sin A.\sin B}{\sin^2 C}$

$\Leftrightarrow \quad 2\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \dfrac{ab}{c^2}$

$\Leftrightarrow \quad c^4 - (a^2 - b^2)^2 = 2a^2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad c^4 - (a^4 + b^4 - 2a^2b^2) = 2a^2b^2$

$\Leftrightarrow \quad 2a^2b^2 = 2a^2b^2$, luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh.

Và câu a) cũng có thể trình bày theo cách khác, như sau :

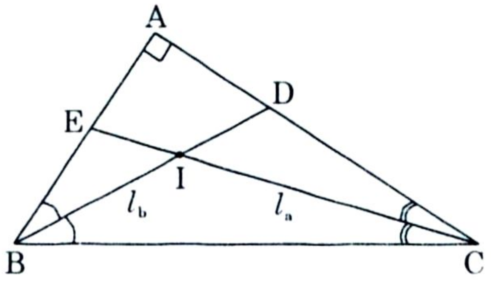
Thật vậy : $a^4 = b^4 + c^4 \quad \Rightarrow \quad a^4 < b^4 + c^4 + 2b^2c^2$

$\Rightarrow \quad a^4 < (b^2 + c^2)^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 < b^2 + c^2$

$\Rightarrow \quad b^2 + c^2 - 2bc.\cos A < b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad \cos A > 0 \quad \Rightarrow$ A nhọn.

BÀI 53.

a) Xét ΔABD, ΔACE.



Ta có : $\cos\dfrac{B}{2} = \dfrac{c}{R_b}$; $\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{b}{l_c}$

Và trong ΔABC : $\sin B.\sin C = \dfrac{bc}{a^2}$

$\Rightarrow \quad 4\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{bc}{a^2}$

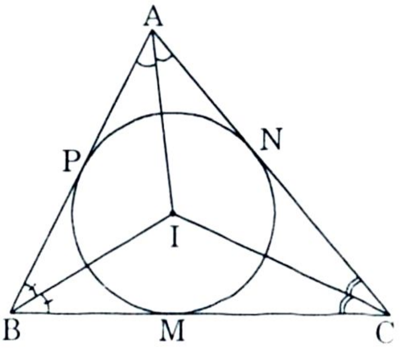
$\Rightarrow \quad 4\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} \cdot \dfrac{bc}{l_b.l_c} = \dfrac{bc}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{l_b.l_c}{4a^2}$.

b) Áp dụng định lí hàm sin trong ΔIBC :

$$\frac{IB}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{IC}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{a}{\sin\widehat{BIC}} = a\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{IB.IC}{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}} = (a\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow \quad IB.IC = 2a^2.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = 2a^2.\frac{l_b.l_c}{4a^2} = \frac{l_b.l_c}{2}.$$

BÀI 54. Theo định lí hàm sin :



$$IA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}, \quad IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}$$

và : $$\frac{IC}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{a}{\sin\widehat{BIC}} = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad IC = \frac{a.\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = 4R.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2} \qquad (\text{vì } a = 2R.\sin A = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2})$$

Vì vậy : $IA.IB.IC = 4Rr^2$

Mặt khác : $S = \dfrac{abc}{4R} = pr \quad \Rightarrow \quad abc = 4Rrp \quad \Rightarrow \quad \dfrac{IA.IB.IC}{abc} = \dfrac{r}{p}$

■ **Chú ý :** Có thể giải cách khác như sau :

Cũng theo định lí hàm sin : $IA = \dfrac{r}{\sin\frac{A}{2}}$, $IB = \dfrac{r}{\sin\frac{B}{2}}$ và $IC = \dfrac{r}{\sin\frac{C}{2}}$.

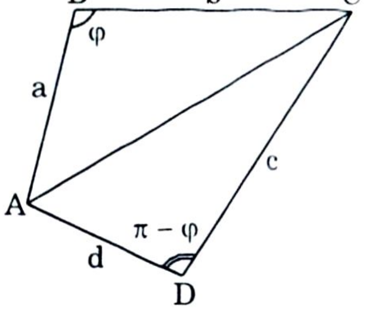
Nên : $$IA.IB.IC = \frac{r^3}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}} = \frac{r^3}{\frac{r}{4R}} = 4Rr^2$$

(Bạn đọc xem lại bài 30 : $\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{4R}$)

$$= \frac{r}{p}.(pr).\left(\frac{4R}{abc}\right)abc = \frac{r}{p}.S.\frac{1}{S}.abc = \frac{r}{p}.abc$$

$$\Rightarrow \quad \frac{IA.IB.IC}{abc} = \frac{r}{p}.$$

BÀI 55. Áp dụng định lí hàm cos vào các ΔABC và ΔACD :



$$\begin{aligned} AC^2 &= a^2 + b^2 - 2ab.\cos\varphi \\ &= c^2 + d^2 - 2cd.\cos(\pi - \varphi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 - 2ax.\cos\varphi = c^2 + d^2 + 2cd.\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

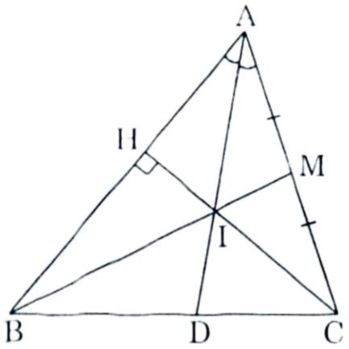
$$\Rightarrow \quad \tan^2\frac{B}{2} = \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi} = \frac{2(ab + cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{2(ab + cd) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}$$

$$= \frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{(a + b)^2 - (c - d)^2} = \frac{(c + d + a - b)(c + d - a + b)}{(a + b + c - d)(a + b - c + d)}$$

$$= \frac{2(p - b).2(p - a)}{2(p - d).2(p - c)} = \frac{(p - a)(p - b)}{(p - c)(p - d)}$$

Vậy $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{(p - c)(p - d)}}$.

BÀI 56. Do : AD, BM, CH đồng quy, nên theo định lí Xê-va :



$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{HA}{HB} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{DB}{DC}\cdot\frac{HA}{HB}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{c}{b}\cdot\frac{\cot A}{\cot B} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin C.\tan B = \sin B.\tan A$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan A = \frac{\sin C}{\cos B}$$

Bạn đọc để ý : A, B đều nhọn (?!)

Ta có : $\frac{\sin B + \sin C}{\sin C} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin(A + B)} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A.\cos B + \sin B.\cos A}$

$$= \frac{\sin B + \sin C}{\cos A.\tan A.\cos B + \sin B.\cos A} = \frac{\sin B + \sin C}{\cos A.\cos C + \sin B.\cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A} = \sqrt{1 + \tan^2 A} = \sqrt{1 + \left(\frac{\sin C}{\cos B}\right)^2} = \frac{\sqrt{\cos^2 B + \sin^2 C}}{\cos B}$$

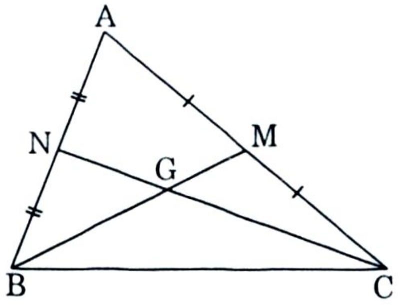
$$\Rightarrow \quad (\sin B + \sin C)\cos B = \sin C\sqrt{\cos^2 B + \sin^2 C} \quad \Rightarrow \quad (\text{đpcm}).$$

Bài 57. Ta có : $BM \perp CN \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{BGC} = 90^\circ$

$$\Leftrightarrow \quad BC^2 = BG^2 + CG^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 = \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 9a^2 = 4m_b^2 + 4m_c^2$$



$\Leftrightarrow \quad 9a^2 = 2(c^2 + a^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2$

$\Leftrightarrow \quad 5a^2 = b^2 + c^2$

$\Leftrightarrow \quad 4a^2 = b^2 + c^2 - a^2 = 2bc.\cos A$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 A = \sin B.\sin C.\cos A$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin A = \dfrac{\cos A}{\sin A} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2\sin(B + C)}{\sin B.\sin C} = \cot A$

$\Leftrightarrow \quad 2(\cot B + \cot C) = \cot A \quad \Rightarrow$ (đpcm).

- *Cách khác :*

Ta có : $\cot A = 2(\cot B + \cot C)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} = 2\left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}\right)$$

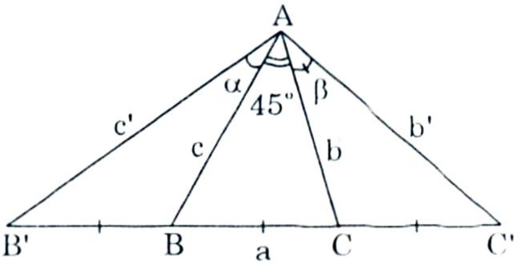
$\Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 - a^2 = 2(2a^2) \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 = 5a^2.$

Vậy bài toán luôn đúng.

BÀI 58. Đặt : $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABB'} = S_{\Delta ACC'} = S$

Vế trái $= (1 + \cot\alpha)(1 + \cot\beta) = (\cot 45^\circ + \cot\alpha)(\cot 45^\circ + \cot\beta)$

$$= \frac{\sin(\alpha + 45^\circ).\sin(\beta + 45^\circ)}{\sin\alpha\sin 45^\circ.\sin\beta\sin 45^\circ}$$



$$= 2\frac{\sin\widehat{B'AC}}{\sin\alpha}.\frac{\sin\widehat{BAC'}}{\sin\beta}$$

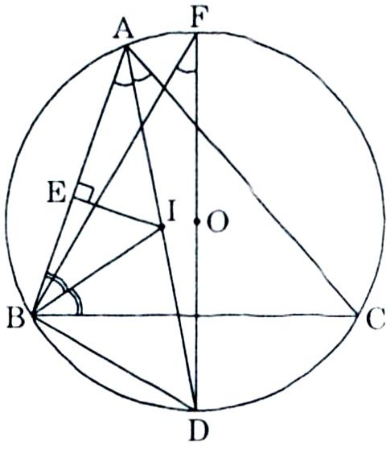
$$= \frac{2\dfrac{S_{\Delta AB'C}}{AB'.AC}.\dfrac{S_{\Delta ABC'}}{AB.AC'}}{\dfrac{S_{\Delta ABB'}}{AB.AB'}.\dfrac{S_{\Delta ACC'}}{AC.AC'}} = \frac{2.2S.2S}{S.S} = 8 = \text{Vế phải} \quad \Rightarrow \quad \text{(đpcm)}.$$

■ **Chú ý :** Bài này chỉ là trường hợp đặc biệt của bài 47 với y = 45°.

BÀI 59. Phương tích điểm I đối với đường tròn tâm O :

$\mathscr{P}_{I/(O)} = -IA.ID = OI^2 - R^2$

$\Rightarrow \quad IA.ID = R^2 - OI^2$



Vì : $\widehat{DBI} = \widehat{DIB}$ (vì cùng $= \dfrac{A + B}{2}$)

$\Rightarrow \quad \Delta DBI$ cân tại D $\quad \Rightarrow \quad DB = DI$

Vì vậy : $\quad IA.IB = R^2 - OI^2 \qquad (1)$

Mặt khác : $\Delta FBD \backsim \Delta AEI$

(bạn đọc tự chứng minh)

Nên : $\dfrac{BD}{IE} = \dfrac{DE}{AI} \Rightarrow IA.BD = 2Rr \quad (2)$

$(1), (2) \quad \Rightarrow \quad 2Rr = R^2 - OI^2 \quad \Rightarrow \quad OI^2 = R^2 - 2Rr.$

■ **Chú ý :**

1. Có thể giải cách khác như sau, không dùng tính chất tam giác đồng dạng :

- Xét ΔAEI : $IA = \dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}$
- Xét ΔABD : $BD = 2R\sin\dfrac{A}{2}$ (Định lí hàm sin) $\Rightarrow$ $IA.BD = 2Rr$ ...

2. Theo công thức Euler :

$$R^2 - 2Rr = OI^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad R^2 \geq 2Rr \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad abc \geq (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC.

3. Nếu thay : $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$ (kết quả bài 30)

Ta có bất đẳng thức quen thuộc : $\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{1}{8}$.

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

BÀI 60.

- *Cách 1 :* Ta có : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$

$$\Rightarrow \quad (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})^2 = 9OG^2$$

$$\Rightarrow \quad 3R^2 + 2(\vec{OA}.\vec{OB} + \vec{OB}.\vec{OC} + \vec{OC}.\vec{OA}) = 9OG^2$$

Mặt khác : $2\vec{OA}.\vec{OB} = 2OA.OB.\cos\widehat{AOB} = 2R^2 - c^2$

Tương tự : $2\vec{OB}.\vec{OC} = 2R^2 - a^2$; $\quad 2\vec{OC}.\vec{OA} = 2R^2 - b^2$

Vì vậy : $3R^2 + 6R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 9.OG^2$

$$\Rightarrow \quad OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \quad \Rightarrow \quad \text{(đpcm).}$$

- *Cách 2 :* Dùng công thức Leibnitz.

Với M bất kì, theo công thức Leibnitz :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

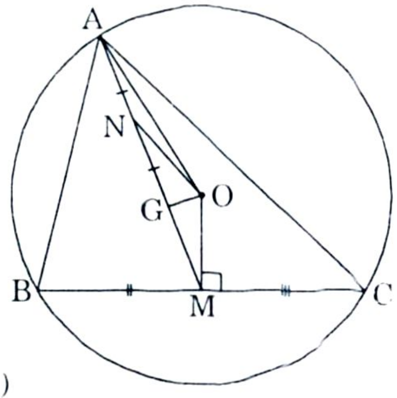
Lấy $M \equiv O$, ta có : $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OG^2 + \dfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

$$\Rightarrow \quad 3R^2 = 3OG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow \quad OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

- *Cách 3 :* Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AG.

Theo hệ thức trung tuyến :



+ Trong ΔOMN :

$$OM^2 + ON^2 = 2OG^2 + \frac{MN^2}{2}$$

$$\Rightarrow R^2 - \frac{a^2}{4} + ON^2 = 2OG^2 + \frac{2m_a^2}{9}$$

$$\Rightarrow 2R^2 - \frac{a^2}{2} + 2ON^2 = 4OG^2 + \frac{4m_a^2}{9} \qquad (1)$$

+ Trong ΔAOG : $OG^2 + OA^2 = 2ON^2 + AG^2$

$$\Rightarrow \quad OG^2 + r^2 = 2ON^2 + \frac{2m_a^2}{9} \qquad (2)$$

Cộng (1), (2) vế với vế : $3R^2 - \frac{a^2}{2} = 2OG^2 + \frac{2m_a^2}{3}$

$$\Rightarrow \quad 3R^2 - \frac{a^2}{2} = 3OG^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}[2(b^2 - c^2) - a^2]$$

$$\Rightarrow \quad 18R^2 - 3a^2 = 18OG^2 + 2(b^2 + c^2) - a^2$$

$$\Rightarrow \quad 18R^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2) = 18OG^2$$

Vậy : $\quad OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$.

■ **Chú ý :** Vì $OG^2 \geq 0$, từ công thức trên suy ra :

$$R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2.$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Vậy trong ΔABC ta luôn có :

- $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$
- Thay $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, ta có bất đẳng thức quen thuộc :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4} \text{ hay } \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$$

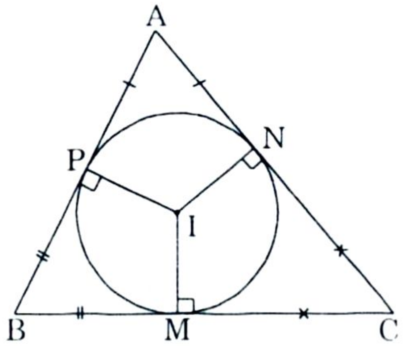
Để ý rằng : $(m_a + m_b + m_c)^2 \le 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$

$$\le 3.\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\le 3.\frac{3}{4}9R^2 = \frac{81R^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad m_a + m_b + m_c \le \frac{9R}{2}.$$

BÀI 61. Theo công thức Leibnitz :



$$IA^2 + IB^2 + IC^2 = 3IG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Mà : $AP = p - a$,

$BP = p - b$,

$CM = p - c$ nên :

$$3r^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = 3IG^2 + \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow \quad 3r^2 + 3p^2 - 2p(a + b + c) + a^2 + b^2 + c^2 = 3IG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow \quad 3r^2 - p^2 + \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) = 3IG^2$$

$$\Rightarrow \quad 9r^2 - 3p^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) = 9IG^2$$

Mặt khác : $r = 4R\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$ (xem bài tập 30)

$$\Rightarrow \quad \frac{4r^2 - 4p^2 + 16Rr + 2(a^2 + b^2 + c^2)}{4R^2} =$$

$$= 16\left(\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\right) - (\sin A + \sin B + \sin C)^2 + 16\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} +$$

$$+ 2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

$$= 2(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C -$$

$$- 2(\sin A.\sin B + \sin B.\sin C + \sin C.\sin A) + 4(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$$

$$= 2[1 - (\cos A + \cos B + \cos C) + \cos A.\cos B +$$

$$+ (\cos A.\cos B + \cos C.\cos A + \cos A.\cos C) - \cos A.\cos B.\cos C]$$

$$+ 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C - 2(\sin A.\sin B + \sin B.\sin C + \sin C.\sin A) +$$

$$+ 4(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$$

$$= 4 + 2(\cos A + \cos B + \cos C) + 2\cos(a + b) + 2\cos(B + c) + 2\cos(C + A) - 4$$

$$= 0$$

Vậy : $IG^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$.

■ **Chú ý :**

1. Trong quá trình chứng minh ta sử dụng "linh hoạt" các công thức sau :

- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ (công thức hạ bậc)
- $\cos(x + y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$ (công thức cộng)
- $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$ (Bạn đọc xem lại bài 6)
- $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C$ (Bạn đọc xem lại bài 8)
- Và nhóm hằng đẳng thức :

  $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

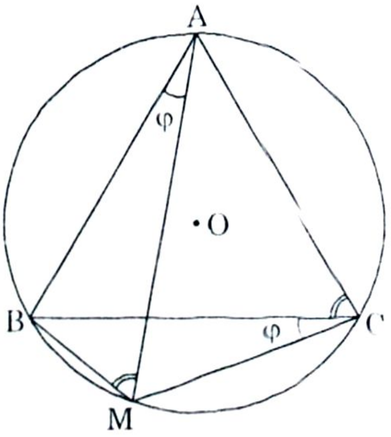
  $(1 - x)(1 - y)(1 - z) = 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz.$

2. Vì : $IG^2 \geq 0$ nên suy ra : $p^2 + 5r^2 \geq 16Rr$, đúng với mọi ΔABC.

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Đây là bài toán rất khó, nếu ta không gặp bài toán 61 trước.

BÀI 62.



a) Ta có : $MB + MC = 2R[\sin\varphi + \sin(60^0 - \varphi)]$

$= 4R\sin 30^0.\cos(\varphi - 30^0)$

$= 2R\sin(\varphi + 60^0)$

$= MA$

b) Đặt : $MB = x$, $MC = y$, $BC = a$.

Theo định lí hàm cos :

$BC^2 = MB^2 + MC^2 - 2MB.MC.\cos 120^0$

$\Rightarrow$ $a^2 = x^2 + y^2 + xy$

$\Rightarrow$ $a^4 = (x^2 + y^2 + xy)^2 = x^4 + y^4 + 3x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3$

Vì vậy : $S = x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2(x^4 + y^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3)$

$= 2a^4 = \text{const}$

$\Rightarrow$ (dpcm).

■ **Chú ý :** Ta có thể chứng minh câu a) theo cách khác, như sau :

Xét tứ giác nội tiếp ABMC, theo định lí Ptôlêmê :

$AB.MC + AC.BM = AM.BC \Leftrightarrow a(MB + MC) = a.AM$

$\Leftrightarrow MB + MC = MA$

Bạn đọc có thể vẽ đường phụ (ví dụ : chọn N ∈ đoạn AM sao cho MB = MN ...) để làm bài toán này.

BÀI 63.

a) Theo công thức hạ bậc :

$$\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = \frac{1}{2}(1 + \cos2A) + \frac{1}{2}(1 + \cos2B) + \cos^2C$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos2A + \cos2B) + \cos^2C = 1 + \cos(A + B).\cos(A - B) + \cos^2C$$

$$= 1 - \cos C.\cos(A - B) - \cos C.\cos(A + B)$$

$$= 1 - \cos C[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$

$$= 1 - \cos C.2\cos A.\cos B = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C.$$

b) Giả thiết $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(1 + \cos2A) + \frac{1}{2}(1 + \cos2B) + \cos^2C = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2C + \frac{1}{2}(\cos2A + \cos2B) = -2\cos A.\cos B.\cos C$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2C + \cos(A + B).\cos(A - B) = -[\cos(A + B) + \cos(A - B)].\cos C$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C[\cos C + \cos(A - B)] + \cos(A - B)[\cos C + \cos(A + B)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad [\cos C + \cos(A - B)][\cos C + \cos(a + B)] = 0$$

A, B, C nhọn nên :

$$\begin{cases} 0 < C < \dfrac{\pi}{2} \\ |A - B| < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos C > 0 \\ \cos(A - B) > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \cos C + \cos(A - B) > 0$$

Nên : $\cos C + \cos(A + B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(A + B) = \cos(\pi - C)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} A + B = \pi - C + k2\pi & (1) \\ A + B = C - \pi + k2\pi & (2) \end{array}\right.$$

- *Biện luận (1) :*

(1) $\Leftrightarrow A + B + C = \pi + k2\pi$

Do : $0 < A + B + C < \dfrac{3\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \pi + k2\pi < \dfrac{3\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad k = 0$$

Vậy : $A + B + C = \pi$.

- *Biện luận (2) :* Cũng từ A, B, C nhọn $\Rightarrow -\dfrac{\pi}{2} < A + B - C < \pi$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < -\pi + k2\pi < \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} < k2\pi < 2\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} < k < 1$$

$$\Rightarrow \quad k \in \varnothing \text{ (vì } k \in \mathbb{Z}\text{)}$$

Tóm lại : $A + B + C = \pi$.

c) Theo định lí hàm sin : $a = 2R.\sin A$, $b = 2R.\sin B$, $c = 2R.\sin C$.

Nên : $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$

$= 4R^2(3 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C)$

$= 4R^2(2 + 2\cos A.\cos B.\cos C)$ (do câu a)

$= 8R^2(1 + \cos A.\cos B.\cos C) \quad \Rightarrow \quad$ (đpcm).

BÀI 64.

a) Ta có : $l_a = \dfrac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{b+c}{2bc} = \dfrac{\cos\frac{A}{2}}{l_a} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) = \dfrac{\cos\frac{A}{2}}{l_a}$ (1)

Chứng minh tương tự : $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{\cos\frac{B}{2}}{l_b}$ (2)

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{\cos\frac{C}{2}}{l_c}$ (3)

Cộng (1), (2), (3) vế với vế ta được : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{\cos\frac{A}{2}}{l_a} + \dfrac{\cos\frac{B}{2}}{l_b} + \dfrac{\cos\frac{C}{2}}{l_c}$.

b) Từ : $l_a = l'_a \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \dfrac{2bc.\sin\frac{A}{2}}{|b-c|}$

$\Leftrightarrow \quad (b - c)\cos\dfrac{A}{2} = (b + c)\sin\dfrac{A}{2}$ (vì $b > c$)

$\Leftrightarrow \quad (\sin B - \sin C)\cos\dfrac{A}{2} = (\sin B + \sin C)\sin\dfrac{A}{2}$ (do định lí hàm sin)

$\Leftrightarrow \quad 2\cos\dfrac{B+C}{2}.\sin\dfrac{B-C}{2}.\cos\dfrac{A}{2} = 2\sin\dfrac{B+C}{2}.\cos\dfrac{B-C}{2}.\sin\dfrac{A}{2}$

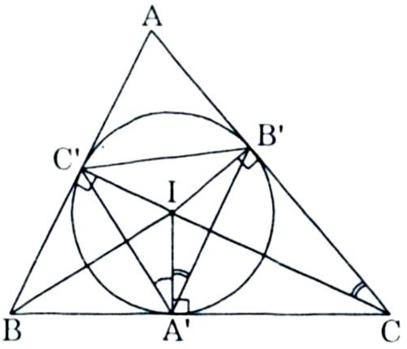
$\Leftrightarrow \quad \sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B-C}{2}.\cos\dfrac{A}{2} = \cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B-C}{2}.\sin\dfrac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \tan\frac{B-C}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B-C}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \left(\text{vì } \left|\frac{B-C}{2}\right| < \frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad B - C = \frac{\pi}{2}$$

■ **Chú ý :** Ta có : $\cos\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$, $\cos\frac{C}{2} \in (0; 1)$ nên từ câu a) suy ra :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c}.$$

BÀI 65. Ta có :



$$a' = 2r\sin A' = 2r\sin\frac{B+C}{2}$$

$$= 2r\cos\frac{A}{2}$$

$$= 2.4R.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}$$

(vì theo bài 30 : $r = 4R\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$)

$$= 4R\left(2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}\right)\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = 4R\sin A.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

$$= 2a\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a'}{a} = 2\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

Chứng minh tương tự : $\frac{b'}{b} = 2\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}$

Vậy : $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\right)$.

b) Ta có : $\frac{S'}{S} = \frac{\frac{1}{2}b'c'.\sin A'}{\frac{1}{2}bc.\sin A} = \frac{b'}{c}.\frac{c'}{c}.\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin A} = \frac{4\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{A}{2}}{\sin A}$

$$= 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

■ **Chú ý :**

1. Theo kết quả bài 59, ta có : $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$

Nên : $\frac{S'}{S} \leq \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad S \geq 4S'$. Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Đây là một bất đẳng thức "đẹp".

2. Ta có thể chứng minh câu a) theo cách khác :

Thật vậy : $a' = AC'\sin\frac{A}{2} = (p-a)\sin\frac{A}{2}$

$$= R(\sin B + \sin C - \sin A)\sin\frac{A}{2}$$

$$= 2R\left(\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{a}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\sin\frac{A}{2}$$

$$= 2R\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right)\sin\frac{A}{2} = a\left(2\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\right)$$

$\Rightarrow \quad \frac{a'}{a} = 2\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\ldots$

BÀI 66.

- *Cách 1 :*

Ta có : $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A.\sin B.\sin C$ (do bài 5)

$$\text{Vế trái} = \frac{2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} = \frac{2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{4\sin A.\sin B.\sin C}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin A}{\sin B.\sin C} + \frac{\sin B}{\sin C.\sin A} + \frac{\sin C}{\sin A.\sin B}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(B+C)}{\sin B.\sin C} + \frac{\sin(C+A)}{\sin C.\sin A} + \frac{\sin(A+B)}{\sin A.\sin B}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\cot B + \cot C + \cot C + \cot A + \cot A + \cot B)$$

$= \cot A + \cot B + \cot C =$ Vế phải.

- *Cách 2 :*

$$\text{Vế trái} = \frac{1}{2R^2}.\frac{a^2+b^2+c^2}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} = \frac{1}{2R^2}.\frac{a^2+b^2+c^2}{4\sin A.\sin B.\sin C}$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{a^2+b^2+c^2}{\frac{1}{2}(2R\sin B)(2R\sin C)\sin A}$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} + \frac{c^2+a^2-b^2}{4S} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$$

$= \cot A + \cot B + \cot C =$ Vế phải

$\Rightarrow$ (đpcm).

BÀI 67.

- *Cách 1 :* Theo định lí hình chiếu : $\begin{cases} a = b.\cos C + c.\cos B \\ b = c.\cos A + a.\cos C \\ c = a.\cos B + b.\cos A \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad a + b + c = b.\cos C + c.\cos B + c.\cos A + a.\cos C + a.\cos B + b.\cos A$$

$$= (b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C$$

$\Rightarrow$ (đpcm).

- *Cách 2 :* Theo định lí hàm cos :

$$(b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C$$

$$= (b + c)\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + (c + a)\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + (a + b)\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{1}{2abc}[a(b + c)(b^2 + c^2 - a^2) + b(c + a)(c^2 + a^2 - b^2) + c(a + b)(a^2 + b^2 - c^2)]$$

$$= \frac{1}{2abc}(ab^3 + abc^2 - a^3b + ab^2c + c^3a - ca^3 + bc^3 + a^2bc - b^3c + abc^2 +$$

$$+ a^3b - ab^3 + ca^3 + ab^3c - c^3a + a^2bc + b^3c - bc^3)$$

$$= \frac{1}{2abc}(2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2) = a + b + c$$

$\Rightarrow$ (đpcm).

- *Cách 3 :* Theo định lí hàm sin :

$$(b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C$$

$$= 2R[(\sin B + \sin C)\cos A + (\sin C + \sin A)\cos B + (\sin A + \sin B)\cos C]$$

$$= 2R[(\sin A.\cos B + \sin B.\cos A) + (\sin B.\cos C + \sin C.\cos B) +$$

$$+ (\sin C.\cos A + \sin A.\cos C)]$$

$$= 2R[\sin(A + B) + \sin(B + C) + \sin(C + A)] = 2R(\sin C + \sin A + \sin B)$$

$$= (2R\sin A) + (2R\sin B) + (2R\sin C) = a + b + c$$

$\Rightarrow$ Kết quả phải làm.

BÀI 68. Ta có : $S = pr = \dfrac{abc}{4R} \quad \Rightarrow \quad abc = 4Rrp = 2Rr(a + b + c)$

Mà : $2b = a + c$ nên : $abc = 2Rr(3b) = 6Rr.b \quad \Rightarrow \quad ac = 6Rr.$

- *Cách khác :*

Theo bài 30, ta có : $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$

nên $ac = 6Rr \Leftrightarrow 4R^2\sin A.\sin C = 24R^2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \sin A.\sin C = 6\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2} = 6\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2} = 3\sin\frac{B}{2}$ (1)

Mặt khác : $2b = a + c \Leftrightarrow 2\sin B = \sin A + \sin C$

$\Leftrightarrow 2\sin B = 2\sin\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2} = \cos\frac{B}{2}.\cos\frac{A-C}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A-C}{2} \Leftrightarrow 3\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A-C}{2} + \sin\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow 3\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A-C}{2} + \cos\frac{A+C}{2} \Leftrightarrow 3\sin\frac{B}{2} = 2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}$ (2)

Vậy (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (đpcm).

BÀI 69.

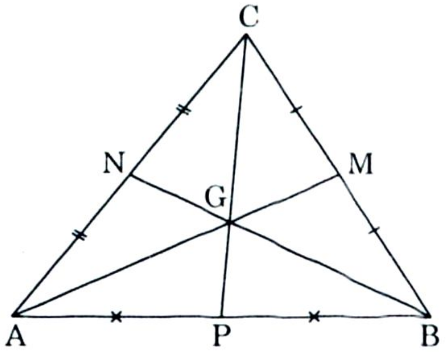
- *Cách 1 :*

Ta có : $m_a = m_b \Leftrightarrow 4m_a^2 = 4m_b^2$

$\Leftrightarrow 2(b^2 + c^2) - a^2 = 2(c^2 + a^2) - b^2$

$\Leftrightarrow 3b^2 = 3a^2 \Leftrightarrow a = b$

- *Cách 2 :*



Ta có : $m_a = m_b \Rightarrow \frac{2}{3}m_a = \frac{2}{3}m_b$

$\Rightarrow$ GA = GB

$\Rightarrow$ ΔGAB cân tại G

$\Rightarrow$ GP $\perp$ AB

$\Rightarrow$ CP $\perp$ AB

$\Rightarrow$ CP vừa là trung tuyến, vừa là đường cao nên ΔABC cân tại C

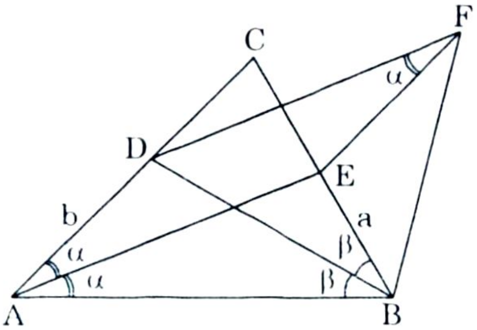
$\Leftrightarrow$ a = b

$\Rightarrow$ (đpcm).

BÀI 70.

- *Cách 1 :* Xét a < b (trường hợp a > b, cách làm tương tự).

Dựng hình bình hành ADFE. Xét hai tam giác ABD, ABE có :



$$\begin{cases} AB \text{ chung} \\ AE = BD \\ \alpha < \beta \end{cases} \Rightarrow \quad AD > BE$$

$$\Rightarrow \quad EF > EB \quad \Rightarrow \quad \widehat{EBF} > \widehat{EFB}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{EBF} + \beta = \widehat{EFB} + \alpha$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{DBF} > \widehat{DFB} \quad \Rightarrow \quad DF > DB$$

$$\Rightarrow \quad l_a > l_b \quad \Rightarrow$$ Vô lí (vì giả thiết $l_a = l_b$)

Vậy : a = b.

- *Cách 2 :* Ta có : $l_a = l_b \quad \Leftrightarrow \quad l_a^2 = l_b^2$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2} = \frac{4cap(p-b)}{(c+a)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b(b+c-a)}{(b+c)^2} = \frac{a(c+a-b)}{(c+a)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad b(b+c-a)(c+a)^2 = a(c+a-b)(b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad b(b+c)(c+a)^2 - ab(c+a)^2 = a(c+a)(b+c)^2 - ab(b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (b+c)(c+a)[b(c+a) - a(b+c)] + ab[(b+c)^2 - (c+a)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad c(b+c)(c+a)(b-a) + ab(b-a)(a+b+2c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (b-a)[c(b+c)(c+a) + ab(a+b+2c)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a = b.$$

- *Cách 3 :* Cũng từ : $l_a = l_b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{l_a} = \frac{1}{l_b}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b+c}{2bc.\cos\frac{A}{2}} = \frac{c+a}{2ca.\cos\frac{B}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} = \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)\frac{1}{\cos\frac{B}{2}} \qquad (0)$$

Ta xét : a > b (vì a < b cách làm tương tự)

$$\Rightarrow \quad A > B \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} > \frac{A}{2} > \frac{B}{2} > 0$$

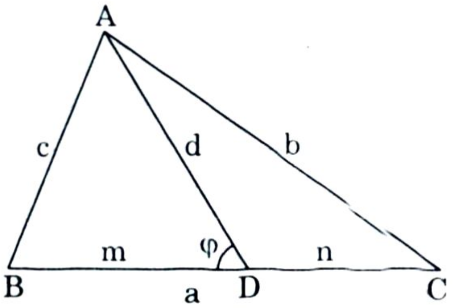
$$\Rightarrow \quad 0 < \cos\frac{A}{2} < \cos\frac{B}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} > \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} \qquad (1)$$

Và : $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \qquad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} > \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}$

$\Rightarrow$ Vô lí (mâu thuẫn với (0)).

BÀI 71.



Theo định lí hàm cos :

$$c^2 = d^2 + m^2 - 2dm.\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad nc^2 = nd^2 + m^2n - 2dmn.\cos\varphi \qquad (1)$$

$$b^2 = d^2 + n^2 - 2dn.\cos(\pi - \varphi)$$

$$\Rightarrow \quad mb^2 = md^2 + mn^2 + 2dmn.\cos\varphi \qquad (2)$$

Cộng (1), (2) vế với vế :

$$mb^2 + nc^2 = (m + n)d^2 + mn(m + n) = ad^2 + m.n.a$$

$$\Rightarrow \quad ad^2 = mb^2 + nc^2 - am.n \quad \Rightarrow \quad (\text{đpcm}).$$

■ **Chú ý :**

- Nếu D là trung điểm BC $\Leftrightarrow$ AD là trung tuyến của tam giác.

Lúc đó : $m = n = \dfrac{a}{2}$

Suy ra : $ad^2 = \dfrac{a}{2}b^2 + \dfrac{a}{2}c^2 - \dfrac{a^3}{4} \quad \Rightarrow \quad d^2 = \dfrac{b^2}{2} + \dfrac{c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

$\Rightarrow$ Công thức trung tuyến : $\boxed{m_a^2 = \dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}}$.

- Nếu AD là phân giác trong góc A, lúc đó : $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b}$

$$\Rightarrow \quad \frac{DB}{DC} + 1 = \frac{c}{b} + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{DC} = \frac{b + c}{b}$$

$$\Rightarrow \quad DC = \frac{ab}{b + c}, \quad DB = \frac{ac}{b + c}$$

$$ad^2 = \left(\frac{ac}{b + c}\right)b^2 + \left(\frac{ab}{b + c}\right)c^2 - \frac{a^3bc}{(b + c)^2}$$

$$\Rightarrow \quad d^2 = \frac{(b + c)^2(bc + bc)^2 - a^2bc}{(b + c)^2} = \frac{bc[(b + c^2 - a^2]}{(b + c)^2} = \frac{4bc.p(p - a)}{(b + c)^2}$$

$\Rightarrow$ Công thức phân giác trong : $\boxed{l_a = \dfrac{2}{b + c}\sqrt{bc.p(p - a)}.}$

BÀI 72.

a) Ta có : $l_a = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bc.p(p-a)}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $(b+c)l_a = 2\sqrt{bc(p-a)}.\sqrt{p}$

Vậy : $(b+c)l_a + (c+a)l_b + (a+b)l_c =$

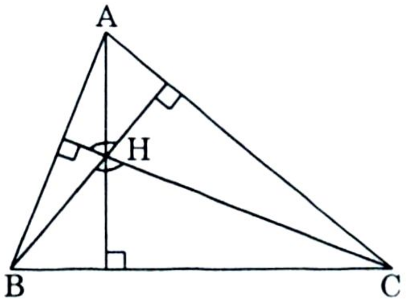
$$= 2\left(\sqrt{bc(p-a)} + \sqrt{ca(p-b)} + \sqrt{ab(p-c)}\right)\sqrt{p}\ .$$

b) Cũng từ : $l_a = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bc.p(p-a)}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\dfrac{b+c}{bc}.l_a = \dfrac{2\sqrt{bc.p(p-a)}}{bc}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)l_a = 2\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

Vậy : $\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)l_a + \left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)l_b + \left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)l_c = 2\left(\sqrt{\dfrac{p-a}{bc}} + \sqrt{\dfrac{p-b}{ca}} + \sqrt{\dfrac{p-c}{ab}}\right)\sqrt{p}\ .$

BÀI 73.



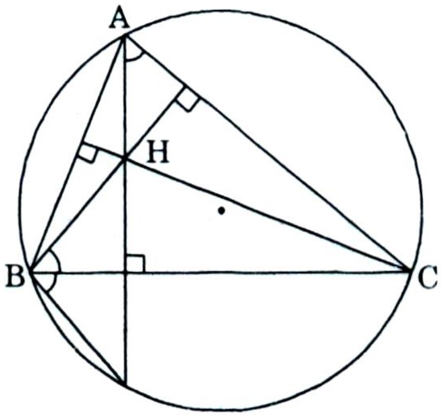
Xét ΔBCH : $R_{\Delta BCH} = \dfrac{BC}{2\sin\widehat{BHC}} = \dfrac{BC}{2\sin A} = R$

Chứng minh tương tự : $R_{\Delta CAH} = R$; $\quad R_{\Delta ABH} = R$

Vậy : $R_{\Delta ABH} = R_{\Delta BCH} = R_{\Delta CAH} = R.$

■ **Chú ý :** Chúng ta có thể giải cách khác chỉ dùng kiến thức lớp 9, như sau :

Thật vậy : Kéo dài AH cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại A' (A ≠ A').



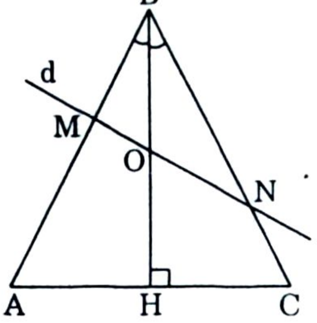
Lúc đó : $\Delta HBC = \Delta A'BC$

vì : $\begin{cases} BC : \text{cạnh chung} \\ \widehat{HBC} = \widehat{A'BC}\ (\text{vì cùng} = \widehat{HAC}) \\ \widehat{HCB} = \widehat{A'CB}\ (\text{vì cùng} = \widehat{HAB}) \end{cases}$

$\Rightarrow \quad R_{\Delta BCH} = R_{\Delta A'BC} = R$ ...

BÀI 74.

- *Cách 1 :* Xét ΔBMN, BO là đường phân giác trong, nên



$$BO = \frac{2BM.BN}{BM+BN}.\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{BM+BN}{BM.BN} = \frac{2\cos\alpha}{BO}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{BM} + \frac{1}{BN} = \frac{2\cos\alpha}{BO} = \frac{2.\dfrac{BH}{AB}}{BO}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AB}{BM} + \frac{AB}{BN} = \frac{2BH}{BO}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AM + BM}{BM} + \frac{BN + CN}{BN} = \frac{2(BO + HO)}{BO}$$

$$\Rightarrow \quad 2 + \frac{AM}{BM} + \frac{CN}{BN} = 2\left(1 + \frac{HO}{BO}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{2HO}{BO} = \frac{AM}{BM} + \frac{CN}{BN}$$

$\Rightarrow$ (đpcm).

- *Cách 2 :* Ta có : $S_{\Delta ABH} = S_{\Delta BCH} = \dfrac{S}{2}$ vì vậy từ đẳng thức

$$S_{\Delta BMN} = S_{\Delta BMO} + S_{\Delta BNO} \quad \Rightarrow \quad \frac{2S_{\Delta BMN}}{S} = \frac{S_{\Delta BMN}}{S_{\Delta ABH}} + \frac{S_{\Delta BNO}}{S_{\Delta BCH}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2BM.BN}{BA.BC} = \frac{BM.BO}{BA.BH} + \frac{BN.BO}{BC.BH}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2BH}{BO} = \frac{BA}{BM} + \frac{BC}{BN} \quad \Rightarrow \quad 2\left(\frac{BO + HO}{BO}\right) = \frac{BM + AM}{BM} + \frac{BN + CN}{BN}$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(1 + \frac{HO}{BO}\right) = 1 + \frac{AM}{BM} + 1 + \frac{CN}{BN} \quad \Rightarrow \quad \frac{2HO}{BO} = \frac{AM}{BM} + \frac{CN}{BN}.$$

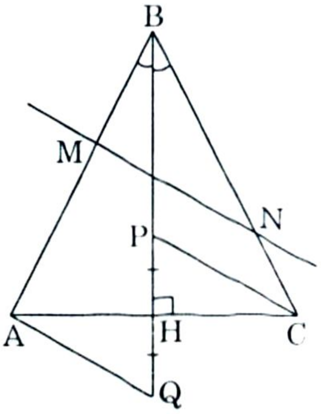
- *Cách 3 :* Dựng : CP // AQ // MN (P, Q ∈ BH).

Theo định lí Talet :

$$\frac{AM}{BM} + \frac{CN}{BN} = \frac{QO}{BO} + \frac{PO}{BO}$$

$$= \frac{HO + HQ}{BO} + \frac{HO - HP}{BO}$$

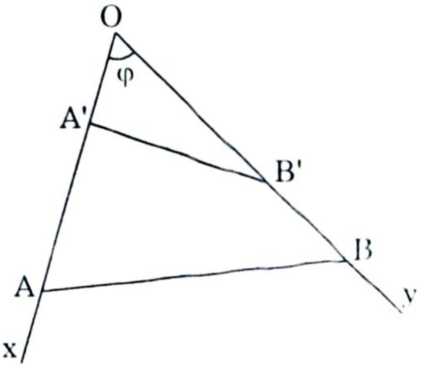
$$= \frac{2HO}{BO} \text{ (vì HQ = HP)} \quad \Rightarrow \text{ (đpcm).}$$



■ **Chú ý :** Trong cách giải thứ 2, ta dùng công thức : "Cho góc $\widehat{xOy} \in (0; \pi)$.

Với A, A' ∈ Ox; B, B' ∈ Oy thì : $\dfrac{S_{\Delta OA'B'}}{S_{\Delta OAB}} = \dfrac{OA'.OB'}{OA.OB}$".

- *Chứng minh :*



Ta có : $S_{\Delta OA'B'} = \dfrac{1}{2} OA'.OB'.\sin\varphi;$

$S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2} OA.OB.\sin\varphi$

Vậy : $\dfrac{S_{\Delta OA'B'}}{S_{\Delta OAB}} = \dfrac{OA'.OB'}{OA.OB}.$

BÀI 75. Trước hết ta thấy :

- $\dfrac{r}{4R} = \sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$ (Do bài 30)
- $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}.\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}.\tan\dfrac{A}{2} = 1$ (Do bài 10)

Vì vậy bài toán $\Leftrightarrow$ $\cos\dfrac{C}{2}\left[\sin\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{A}{2}\right] + \sin\dfrac{C}{2}.\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2} =$

$$= 1 + \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{C}{2}.\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A+B}{2} = 1$$

$\Leftrightarrow \quad \cos^2\dfrac{C}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} = 1$, luôn đúng $\Rightarrow$ (đpcm).

- *Cách khác :*

Vế trái $= \cos\dfrac{C}{2}\left(\sin\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{A}{2}\right) + \sin\dfrac{C}{2}.\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}$

$$= \cos\frac{C}{2}.\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) + \sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}$$

$$= \cos^2\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} = 1 - \sin^2\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}$$

$$= 1 + \sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 1 + \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} - \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\right]$$

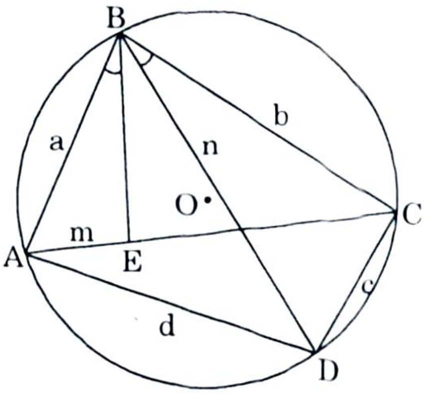
$$= 1 + \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} - \left(\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}\right)\right]$$

$= 1 + \sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} =$ Vế phải.

BÀI 76.

- *Cách 1 :* Đặt : AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = m và BD = n.

Theo định lí hàm cos :



$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos B$$

$$m^2 = c^2 + d^2 + 2cd.\cos B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cd.m^2 = cd(a^2 + b^2) - 2abcd.\cos B \\ ab.m^2 = ab(c^2 + d^2) + 2abcd.\cos B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (ab + cd)m^2 = cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)$$

$$= (ad + bc)(ca + bd)$$

$$\Rightarrow \quad m^2 = \frac{(ad + bc)(ca + bd)}{ab + cd}$$

Chứng minh tương tự : $m^2 = \dfrac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}$

Do đó : $m^2.n^2 = (ac + bd)^2 \quad \Leftrightarrow \quad m.n = ac + bd$

và $\dfrac{m^2}{n^2} = \left(\dfrac{ad + bc}{ab + cd}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{m}{n} = \dfrac{ad + bc}{ab + cd} \quad \Rightarrow \quad$ (đpcm).

- *Cách 2 :* Lấy E ∈ đoạn AC : $\widehat{ABE} = \widehat{DBC}$

Lúc đó : $\Delta ABE \backsim \Delta DBC$ (bạn đọc tự kiểm tra)

$$\Rightarrow \quad \frac{AB}{BD} = \frac{AE}{DC} \quad \Rightarrow \quad n.AE = ac \qquad (1)$$

và : $\Delta BEC \backsim \Delta BAD$ (bạn đọc cũng tự kiểm tra)

$$\Rightarrow \quad \frac{EC}{AD} = \frac{BC}{BD} \quad \Rightarrow \quad n.EC = bd \qquad (2)$$

Cộng (1), (2) vế với vế, ta được : n(AE + EC) = ac + bd

$$\Rightarrow \quad m.n = ac + bd$$

Hơn nữa :

$$\frac{ad + bc}{ab + dc} = \frac{\sin B}{\sin A}.\frac{\frac{1}{2}ad\sin A + \frac{1}{2}bc.\sin C}{\frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin D} \quad \text{(vì } \sin A = \sin C,\ \sin B \ \ \sin D)$$

$$= \frac{\sin B}{\sin A}.\frac{S_{\Delta ABD} + S_{\Delta CBD}}{S_{\Delta BAC} + S_{\Delta DAC}} = \frac{2R\sin B}{2E\sin A}.\frac{S_{ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \text{(đpcm).}$$

■ **Chú ý :** "Cho tứ giác lồi ABCD có : AC.BD = AB.CD + BC.AD thì tứ giác ABCD nội tiếp".

Đây là định lí đảo Ptôlêmê. Phần chứng minh dành cho bạn đọc (các làm tương tự cách 2).

BÀI TẬP TỰ GIẢI

77. Cho ΔABC, A > B > C, $l'_a = l'_c$. Chứng minh : $c.\sin\dfrac{A-B}{2} = a.\sin\dfrac{B-C}{2}$.

Hãy nêu ý nghĩa hình học của hệ thức trên.

78*. Cho ΔABC. Chứng minh rằng : $(r_q^2 + p^2)(r_a - c) = 4Rr_a^2$.

79*. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn đơn vị, chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8(\sin A.\sin B.\cos C + \sin B.\sin C.\cos A + \sin C.\sin A.\cos B).$$

80. Cho ΔABC có 3 góc nhọn. Gọi A', B', C' lần lượt là các chân đường cao hạ từ A, B, C. Chứng minh rằng :

a) Chu vi ΔA'B'C' là $2p' = 4R\sin A.\sin B.\sin C$

b) Diện tích ΔA'B'C' là $S' = 2S.\cos A.\cos B.\cos C$

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔA'B'C' : $R' = \dfrac{R}{2}$

d) Bán kính đường tròn nội tiếp : $r' = 2R.\cos A.\cos B.\cos C$.

81*. Cho ΔABC cân tại A, $\widehat{A} = 10^\circ$. Chứng minh :

a) $\left(\dfrac{4S}{b^2}\right)^2 + \dfrac{b^2}{4S} = 3$ b) $\cos A = \dfrac{2R + r - r_a}{2R}$.

82*. Cho ΔABC. Chứng minh :

a) $abc.(\cos A + \cos B + \cos C) = a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c)$

b) $a.\cot A + b.\cot B + c.\cot C = 2(R + r)$.

83*. Cho ΔABC. A, B, C lập thành cấp số nhân công bội bằng 2. Gọi O, H tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm tam giác.

Chứng minh : $OH = R\sqrt{2}$.

84*. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $r_a = r + 4R\sin^2\dfrac{A}{2}$ b) $r_a - r_b = 4R\cos\dfrac{C}{2}.\sin\dfrac{A-B}{2}$

c) $p^2 = bc.\cos^2\dfrac{A}{2} + ca.\cos^2\dfrac{B}{2} + ab.\cos^2\dfrac{C}{2}$

d) $(p - a)^2\sin A + (p - b)^2\sin B + (p - c)^2\sin C = 4r(2R - r)\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

85*. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{3\cos A}{b.\cos C + c.\cos B} + \dfrac{3\cos B}{c.\cos A + a.\cos C} + \dfrac{3\cos C}{a.\cos B + b.\cos A} = 2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$

b) $\sin\frac{A}{2} = \frac{r_a}{\sqrt{(r_a + r_b)(r_a + r_c)}}$

c) $\frac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} + \frac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} + \frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} = 0$

d) $2(r_a + r_b + r_c) = a.\cot\frac{A}{2} + b.\cot\frac{B}{2} + c.\cot\frac{C}{2}$

e) Gọi M là trung điểm BC thì : $\tan\frac{B - C}{2} = \tan\frac{\beta - \gamma}{2}.\cot^2\frac{\beta + \gamma}{2}$

với $\beta = \widehat{BAM}$, $\gamma = \widehat{CAM}$.

86. Cho ΔABC. H, G lần lượt là trực tâm và trọng tâm ΔABC. HG // BC. Chứng minh :

a) $\tan B.\tan C = 3$ b) $2\tan A = \tan B + \tan C$

c) $\cos(B - C) = 2\cos A$.

87. Cho tứ giác lồi ABCD. Có AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = f. Chứng minh rằng : $KL^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2)$.

Với K, L lần lượt là trung điểm AC và BD (công thức Euler cho tứ giác).

88. Cho ΔABC có 3 góc nhọn. AA', BB', CC' là 3 đường cao. Chứng minh rằng : $AA'.AH + BB'.BH + CC'.CH = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

89. Cho ΔABC có $h_a > h_b > h_c$. Chứng minh : $a < b < c$.

90*. Có tồn tại hay không một tam giác không cân thỏa : $a + m_a = b + m_b$?

91*. Cho tứ giác lồi ABCD. Trong đó : AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{BCD} = \gamma$. Chứng minh :

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab.\cos\beta - 2bc.\cos\gamma + 2ca.\cos(\beta + \gamma)$$

(Định lí cos thứ nhất cho tứ giác).

92. Cho điểm M nằm trong ΔABC sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA} = \varphi$. Chứng minh : $\cot\varphi = \cot A + \cot B + \cot C$.

93. Cho ΔABC. Gọi G là trọng tâm tam giác. Chứng minh :

a) $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = \frac{S}{r^2}$ b) $\cot C - \cot\widehat{ABC} = \frac{2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}{9S}$.

94. Cho tứ giác ABCD vừa nội tiếp, vừa ngoại tiếp. Có S là diện tích, p là nửa chu vi. Chứng minh rằng :

a) $S = \sqrt{abcd}$ b) $S = p^2\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} + \tan\frac{D}{2}\right)$.

95*. Cho hình bình hành với 2 cạnh là a, b (a > b). Hai đường chéo 2x, 2y (x > y). Gọi φ là góc nhọn giữa 2 cạnh. Chứng minh rằng :

a) $4abxy.\cos\varphi.\cos\varphi_1 = (x^2 - y^2)(a^2 - b^2)$

b) $(a^2 - b^2)\tan\varphi_1 = 2ab.\sin\varphi$.

96*. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Gọi R_1, R_2, R_2, R_4 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB. Chứng minh rằng : $R_1R_3 = R_2R_4$.

97*. Trong trường hợp bài 96 bỏ điều kiện ABCD nội tiếp trong điều kiện : $B + D < A + C$ thì $R_1R_3 < R_2R_4$.

98. Định x để : $x^2 + 2x + 3$, $x^2 + 1$, $x^2 + 4x + 5$ là 3 cạnh của ΔABC với điều kiện có được, chứng minh rằng : $r = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 6x + 7)}$.

99*. Cho ΔABC, $A = \dfrac{\pi}{7}$. Chứng minh : $a^4 - 3a^2b^2 - ab^3 + b^4 = 0$.

100. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $r_ar_br_c = rp^2$

b) $S = \dfrac{(a^2 - b^2).\sin A.\sin B}{2\sin(A - B)}$ $(A \neq B)$

c)* $bc.\cot\dfrac{A}{2} + ca.\cot\dfrac{B}{2} + ab.\cot\dfrac{C}{2} = 4R.p^2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} - \dfrac{3}{p}\right)$

d)* $r_a + r_b + r = r_c + 4R.\cos C$

e) Trong trường hợp phân giác trong góc A, trung tuyến góc B và đường cao kẻ từ C đồng quy thì : $\cos A = \dfrac{c}{b + c}$.

Hướng dẫn : Ta có thể dùng các định lí sau để giải câu e :

- *Cách 1 :* Dùng định lí hàm sin và định lí Xêva.
- *Cách 2 :* Dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông và công thức

phân giác trong $l_a = \dfrac{2bc.\cos\dfrac{A}{2}}{b + c}$.

B. TÍNH CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC

■ **Phương pháp chung :**

Thực chất của dạng toán này là giải phương trình, hệ phương trình và xa hơn nữa là giải bất phương trình mà các ẩn số là các yếu tố trong tam giác được thiết lập từ các điều kiện và giả thiết cho trước.

BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

BÀI 101. Cho ΔABC.

a) Chứng minh rằng : $a\sin B.\sin C = h_a\sin(B + C)$.

b) Cho : $\frac{a}{h_a} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$, $A = 60^0$. Tính B, C.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng các công thức sau :

- $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C$
- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

BÀI 102. Tính đường cao của hình bình hành, biết chiều dài hai đáy là a, b. Góc giữa hai cạnh không song song bằng α và biết rằng hai đường chéo vuông góc nhau.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos.

BÀI 103. Cho ΔABC. Biết : $\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2}$. Tính các góc của tam giác.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức cộng : $\sin(x + y) = \sin x.\cos y + \sin y.\cos x$

BÀI 104. Cho ΔABC, A là trung điểm đoạn OB, $OB \perp OC$.

a) Chứng minh : $3\sin C = \sin(A - B)$.

b) Biết $\hat{A} = 2\hat{B}$. Tính $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, r theo c ?

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông.

BÀI 105. Cho ΔABC với 3 góc A, B, C thỏa : $\begin{cases} 2B = A + C \\ A \geq B \geq C \end{cases}$

a) Tính A, B, C

b) Tính a, b, c (biết r = 1).

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng công thức biến đổi :

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2}$$ và định lí hàm sin.

BÀI 106. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn lượng giác (bán kính = 1). Các góc A, B, C thứ tự lập thành cấp số nhân công bội 2.

a) Tính A, B, C.

b) Chứng minh : $\cos A.\cos B.\cos C = -\frac{1}{8}$

c) Tính : $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$.

■ ***Hướng dẫn :*** Bạn đọc lưu ý bài này với các bài 8, 27b) (phần bài tập tự giải).

BÀI 107. Cho ΔABC, $m_a = c$. Chứng minh :

a) $\tan B = 3\tan C$ b) $\sin A = 2\sin(B - C)$

c) Cho $A = 120^\circ$. Tính B, C.

- ***Hướng dẫn :*** Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông.

BÀI 108. Cho ΔABC.

a) Chứng minh rằng : $\widehat{A} = 2\widehat{B} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc$.

b) Tính $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$. Biết : $\begin{cases} b^2 = a^2 + ac \\ c^2 = b^2 + ba. \end{cases}$

- ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin.

BÀI 109. Cho ΔABC vuông tại A và a, $\sqrt{\frac{2}{3}}b$, c lập thành cấp số nhân.

Tính B, C.

- ***Hướng dẫn :***

$$a,\ \sqrt{\frac{2}{3}}b,\ c \text{ lập thành cấp số nhân } \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{2}{3}}b\right)^2 = ac \Leftrightarrow 2b^2 = 3ac$$

BÀI 110. Cho $a = x^2 + 2x + 3$, $b = x^2 + 1$, $c = x^2 + 4x + 5$.

a) Tìm điều kiện để a, b, c tạo thành ba cạnh của một tam giác.

b) Tính r, R theo x.

- ***Hướng dẫn :*** Sử dụng các công thức :

- *a, b, c là ba cạnh một tam giác* $\Leftrightarrow \begin{cases} b + c > a \\ c + a > b \\ a + b > c \end{cases}$

- $S = \dfrac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\Rightarrow R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

BÀI 111. Cho ΔABC, $A = \varphi \in (0; \pi)$, $BC = a$, $AC - AB = l > 0$.

Tính các góc B, C theo φ, a, l.

- ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin.

BÀI 112. Cho ΔABC có 3 góc lập thành cấp số cộng (thep thứ tự A, B, C) thỏa : $2(\sin A + \sin B + \sin C) = 3 + \sqrt{3}$.

a) Tính A, B, C.

b) Cho p = 50 (đơn vị độ dài). Tính a, b, c.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin.

BÀI 113. Cho ΔABC, $\tan A.\tan B = -2$, $\tan A.\tan C = \frac{1}{2}$. Tính A, B, C.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức : $tanA + tanB + tanC = tanA.tanB.tanC$

BÀI 114. Cho ΔABC, $B - C = 90^0$.

a) Cho $b + c = a\sqrt{2}$. Tính A, B, C.

b) Chứng minh rằng : $b^2 - c^2 = 2aR$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin.

BÀI 115. Cho ΔABC có : $2h_a = h_b + h_c$.

a) Chứng minh : $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$.   b) Cho $A = 60^0$. Tính B, C.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin.

BÀI 116. Cho ΔABC. AM, BN, CP là ba trung tuyến, $\widehat{AMB} = \alpha$, $\widehat{BNC} = \beta$, $\widehat{CPA} = \gamma$.

a) Chứng minh : $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = 0$.

b) Cho a = 3, b = 5, c = 7. Tính α, β, γ.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức trung tuyến : $\begin{cases} cotA = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \\ m_a^2 = \dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \end{cases}$

BÀI 117. Cho ΔABC.

a) Chứng minh rằng : m_a, m_b, m_c là ba cạnh của một tam giác.

b) Tính diện tích ΔABC theo m_a, m_b, m_c.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức Hêrông về diện tích tam giác.

BÀI 118. Cho ΔABC đều, M nằm trên cung AB, biết MA = 1, MB = 2. Tính MC.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin.

BÀI 119. Cho ΔABC có a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng ($a < b < c$).

a) Chứng minh : ac = 6Rr.   b) Cho $B = 30^0$. Tính A, C.

BÀI 120. Cho ΔABC có các góc B, C nhọn. G, H lần lượt là trọng tâm, trực tâm ΔABC, GH // BC.

a) Chứng minh : $\tan B.\tan C = 3$.
b) Chứng minh : $\cos(B - C) = 2\cos A$.

c) Tính B, C, b, c biết : $a = \tan A = 2$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng tính đồng dạng của các tam giác.

BÀI 121. Cho ΔABC tuỳ ý. Dựng phía ngoài tam giác này các tam giác đều ABD, BCE, CAF.

a) Chứng minh rằng tâm các ΔABD, ΔBCE, ΔCAF là đỉnh của một tam giác đều.

b) Tính các cạnh của tam giác đều trên theo a, b, c ($a = BC$, $b = CA$, $c = AB$).

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos.

LỜI GIẢI

BÀI 101.

a) Ta có : $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab.\sin C \quad \Rightarrow \quad ah_a = ab\sin C$

$\Rightarrow \quad (2R\sin A)h_a = a(2R\sin B).\sin C$

$\Rightarrow \quad a.\sin B.\sin C = \sin A.h_a = \sin(B + C)h_a \quad \Rightarrow \quad$ (đpcm).

b) Giả thiết : $\dfrac{a}{h_a} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\sin A}{\sin B.\sin C} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$

$$\Leftrightarrow \quad \sin B.\sin C = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}}.\sin A = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}[\cos(B - C) - \cos(B + C)] = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(B - C) + \cos A = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(B - C) + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

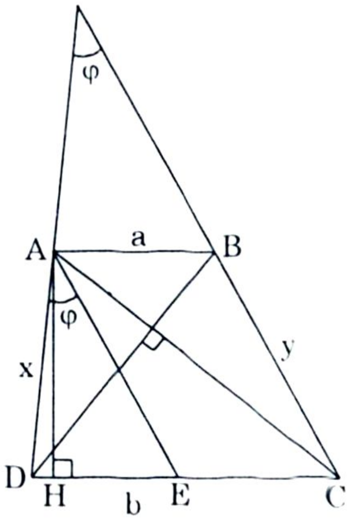
$$\Leftrightarrow \quad \cos(B - C) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |B - C| = 30^\circ$$

Cùng với $B + C = 120^\circ$.

Vậy : $\begin{cases} B = 75^\circ \\ C = 45^\circ \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} B = 45^\circ \\ C = 75^\circ \end{cases}$ (Bạn đọc để ý : $0 \le |B - C| < 180^\circ$).

BÀI 102.

Đặt : AD = x, BC = y. Dựng AE // BC ($E \in CD$).



Ta có : DE = b − a.

Lúc đó : $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \\ (b-a)^2 = x^2 + y^2 - 2xy.\cos\alpha \end{cases}$

$\Rightarrow \quad xy.\cos\alpha = ab$

Mặt khác :

$$S_{\Delta ADE} = \frac{1}{2}xy.\sin\alpha = \frac{1}{2}h.DE = \frac{h}{2}(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{xy.\sin\alpha}{b-a} = \frac{xy.\cos\alpha}{b-a}.\tan\alpha = \frac{ab.\tan\alpha}{b-a}$$

■ **Chú ý :** Trong một tứ giác lồi ABCD ta luôn có :

"$AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$".

(Bạn đọc tự chứng minh, xem như một bài tập khó).

BÀI 103.

- *Cách 1 :* Đặt : $\sin A = \dfrac{\sin B}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sin C}{2} = t > 0$

Lúc đó : $\begin{cases} \sin A = \sin(B+C) = \sin B.\cos C + \sin C.\cos B \\ \sin B = \sin(C+A) = \sin C.\cos A + \sin A.\cos C \\ \sin C = \sin(A+B) = \sin A.\cos B + \sin B.\cos A \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{3}t.\cos C + 2t.\cos B \\ \sqrt{3}t = 2t.\cos A + t.\cos C \\ 2t = t.\cos B + \sqrt{3}t.\cos A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}.\cos C + 2\cos B = 1 \\ 2\cos A + \cos C = \sqrt{3} \\ \cos B + \sqrt{3}.\cos A = 2 \end{cases}$$

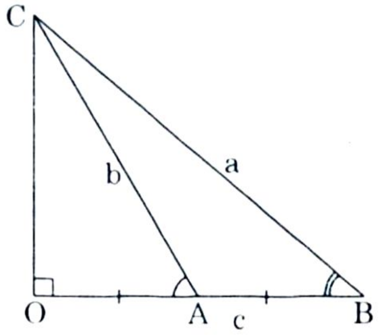
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos B = \dfrac{1}{2} \\ \cos C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 30^o \\ B = 60^o \\ C = 90^o \end{cases}$$

- *Cách 2 :* $\dfrac{\sin A}{1} = \dfrac{\sin B}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sin C}{2} \Leftrightarrow \dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{\sqrt{3}} = \dfrac{c}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ (với $B'C' = 1$, $C'A' = \sqrt{3}$, $A'B' = 2$)

mà $\Delta A'B'C'$ có $\begin{cases} A' = 30^0 \\ B' = 60^0 \\ C' = 90^0 \end{cases}$ (Bạn đọc tự kiểm tra) nên : $\begin{cases} A = 30^0 \\ B = 60^0 \\ C = 90^0. \end{cases}$

BÀI 104.



a) • Xét ΔCOA : $\tan\widehat{CAO} = \dfrac{OC}{c}$

• Xét ΔCOB : $\tan\widehat{CBO} = \dfrac{OC}{2c}$

Vì vậy : $\tan\widehat{CAO} = 2\tan\widehat{CBO}$

$\Leftrightarrow \quad \tan(\pi - A) = 2\tan B$

$\Leftrightarrow \quad -\tan A = 2\tan B \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad -\sin A.\cos B = 2\sin B.\cos A$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)] = \sin(B + A) + \sin(B - A)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\sin C - \sin(A - B) = 2[\sin C + \sin(B - A)]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B) = 3\sin C$$

b) Từ giả thiết $\hat{A} = 2\hat{B} > \hat{B} \Rightarrow \hat{B}$ nhọn (vì trong tam giác góc vuông hay tù nếu có chỉ một) $\Rightarrow \tan B > 0$.

Và theo (1) : $\tan A = -2\tan B \quad \Leftrightarrow \quad \tan 2B = -2\tan B$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\tan B}{1 - \tan^2 B} = -2\tan B \quad \Leftrightarrow \quad -1 = 1 - \tan^2 B$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan^2 B = 2 \quad \Rightarrow \quad \tan B = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \hat{B} = \arctan\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy : } \begin{cases} \hat{A} = 2\arctan\sqrt{2} > 0 \\ \hat{B} = \arctan\sqrt{2} > 0 \\ \hat{C} = \pi - 3\arctan\sqrt{2} > 0 \ (?!) \end{cases}$$

Hơn nữa : $OC = OA\tan\widehat{CAO} = c.\tan(\pi - A) = -c.\tan A = -c(-2\tan B)$

$$= 2\sqrt{2}.c$$

$$AC = \sqrt{OC^2 + OA^2} = \sqrt{8c^2 + c^2} = 3c$$

$$BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{8c^2 + 4c^2} = 2\sqrt{3}.c$$

Lúc đó : $p = \dfrac{1}{2}(a + b + c) = \dfrac{1}{2}(2\sqrt{3}c + 3c + c) = (\sqrt{3} + 2)c$

$$S = \frac{1}{2}OC.AB = \frac{1}{2}2\sqrt{2}c.c = \sqrt{2}c^2$$

Vậy : $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\sqrt{2}c^2}{(\sqrt{3} + 2)c} = \dfrac{\sqrt{2}c}{\sqrt{3} + 2} = (2\sqrt{2} - \sqrt{6})c$.

BÀI 105.

a) Do : $\begin{cases} A + B + C = \pi \\ 2B = A + C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{\pi}{3} \\ A + C = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$

Nên : $\cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2} \Leftrightarrow \cos A + \dfrac{1}{2} + \cos C = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos C + \cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\cos\dfrac{C + A}{2}.\cos\dfrac{C - A}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow 2.\dfrac{1}{2}.\cos\dfrac{A - C}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\dfrac{A - C}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

Hơn nữa : $C \leq A < \pi \Rightarrow 0 < \dfrac{A - C}{2} < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{A - C}{2} = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow A - C = \dfrac{\pi}{3}$

Vậy : $\begin{cases} A + C = \dfrac{2\pi}{3} \\ A - C = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{\pi}{2} \\ B = \dfrac{\pi}{3} \\ C = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

b) Theo định lí hàm sin :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a = \frac{2b}{\sqrt{3}} = 2c$$

Khi đó : $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}c.c = \dfrac{\sqrt{3}c^2}{2}$

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(2c + \sqrt{3}c + c) = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}.c$$

Nên : $1 = r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}c^2}{\frac{3 + \sqrt{3}}{2}c} = \dfrac{c}{\sqrt{3} + 1} \Rightarrow c = \sqrt{3} + 1$

Vậy : $a = 2(\sqrt{3} + 1)$, $b = 3 + \sqrt{3}$, $c = \sqrt{3} + 1$.

BÀI 106.

a) Ta có : $A = \dfrac{B}{2} = \dfrac{C}{4} \Leftrightarrow C = 2B = 4A$ mà : $A + B + C = \pi$

$$\text{Vậy : }\begin{cases} A = \dfrac{\pi}{7} \\ B = \dfrac{2\pi}{7} \\ C = \dfrac{4\pi}{7} \end{cases}$$

b) $\cos A.\cos B.\cos C = \cos\dfrac{\pi}{7}.\cos\dfrac{2\pi}{7}.\cos\dfrac{4\pi}{7} = \dfrac{1}{8\sin\dfrac{\pi}{7}}.8\sin\dfrac{\pi}{7}.\cos\dfrac{\pi}{7}.\cos\dfrac{2\pi}{7}.\cos\dfrac{4\pi}{7}$

$$= \frac{1}{8\sin\dfrac{\pi}{7}}.4\sin\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{1}{8\sin\dfrac{\pi}{7}}.2\sin\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}$$

$$= \frac{1}{8\sin\dfrac{\pi}{7}}.\sin\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{8} \quad \left(\text{vì } \sin\frac{8\pi}{7} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\sin\frac{\pi}{7}\right)$$

Vậy : $\cos A.\cos B.\cos C = -\dfrac{1}{8}$.

c) Ta có : $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$

$$= 4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \text{ (vì } R = 1)$$

$$= 8(1 + \cos A.\cos B.\cos C) = 8\left(1 - \frac{1}{8}\right) = 7$$

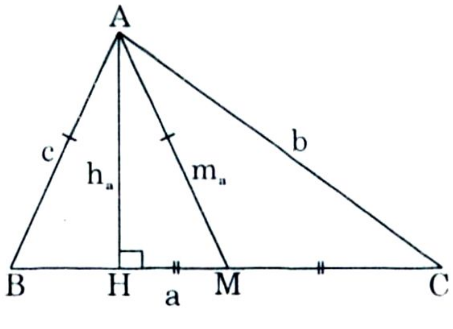
(Bạn đọc để ý : $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2.\cos A.\cos B.\cos C$ đã làm ở bài 8).

$$\Rightarrow \quad m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{21}{4}.$$

BÀI 107.

a) $\tan B = \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{h_a}{\dfrac{a}{4}} = \dfrac{4h_a}{a}$

$\tan C = \dfrac{AH}{CH} = \dfrac{h_a}{\dfrac{3a}{4}} = \dfrac{4h_a}{3a}$



Vậy $\tan B = 3\tan C$.

b) Từ : $\tan B = 3\tan C \Leftrightarrow \dfrac{\sin B}{\cos B} = \dfrac{3\sin C}{\sin C}$

$\Leftrightarrow \quad \sin B.\cos C = 3\sin C.\cos B$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{2}[\sin(B + C) + \sin(B - C)] = \dfrac{3}{2}[\sin(B + C) - \sin(B - C)]$

$\Leftrightarrow \quad \sin A + \sin(B - C) = 3[\sin A - \sin(B - C)]$

$\Leftrightarrow \quad 4\sin(B - C) = 2\sin A \quad \Leftrightarrow \quad \sin A = 2\sin(B - C)$

c) Ta có : $A = 120^0 \quad \Rightarrow \quad \sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin(B - C) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Vậy : $\begin{cases} B - C = \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ B + C = 120^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 60^0 + \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ C = 60^0 - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

BÀI 108.

a) • *Cách 1 :* Ta có : $a^2 = b^2 + bc \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 A - \sin^2 B = \sin B.\sin C$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2A) - \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2B) = \sin B.\sin C$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{2}(\cos 2B - \cos 2A) = \sin B.\sin C$

$\Leftrightarrow \quad \sin(A + B).\sin(A - B) = \sin B.\sin C$

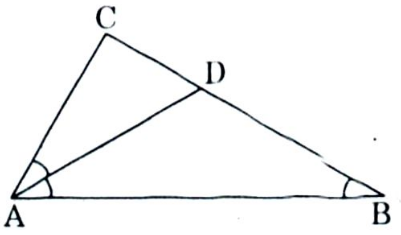
$\Leftrightarrow \quad \sin C.\sin(A - B) = \sin B.\sin C$

$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B) = \sin B$ (vì $\sin C > 0$) $\quad \Leftrightarrow \quad A - B = B \quad \Leftrightarrow \quad A = 2B$

Vậy : $A = 2B \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 + bc.$

• *Cách 2 :* Xét ΔCAD và ΔCBA.

Lúc đó : $\hat{A} = 2\hat{B} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{CAD} = \widehat{CBA} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta CAD \backsim \Delta CBA$



$\Leftrightarrow \quad \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CD}{CA} \quad \Rightarrow \quad b^2 = a.CD \qquad (1)$

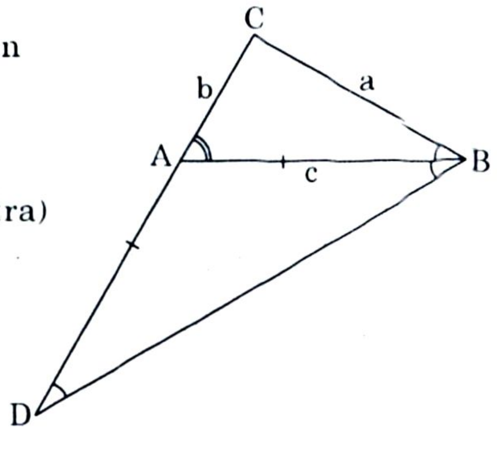
Mà : $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{DB}{DC} + 1 = \dfrac{c}{b} + 1$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{a}{DC} = \dfrac{b + c}{b} \quad \Leftrightarrow \quad DC = \dfrac{ab}{b + c}$

Nên (1) $\Leftrightarrow \quad b^2 = a.\dfrac{ab}{b + c} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b(b + c)$

Vậy : $\quad A = 2B \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 + bc.$

• *Cách 3 :* Kéo dài CA về phía A một đoạn AD = AB = c.



Lúc đó : $A = 2B \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{ADB} = \widehat{ABC}$

$\Leftrightarrow \quad \Delta CDB \backsim \Delta CBA$ (Bạn đọc tự kiểm tra)

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{BC}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b(b + c)$

$\Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 + bc \quad \Rightarrow \quad$ (đpcm).

b) Theo câu a) : $\begin{cases} b^2 = a^2 + ac \\ c^2 = b^2 + ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{B} = 2\hat{A} \\ \hat{C} = 2\hat{B} \end{cases}$

Mà : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \quad \Leftrightarrow \quad 7\hat{A} = \pi \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = \frac{\pi}{7}, \hat{B} = \frac{2\pi}{7}, \hat{C} = \frac{4\pi}{7}.$

■ **Chú ý :**

- Biện luận : $\sin(A - B) = \sin B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A - B = B + k2\pi \\ A - B = \pi - B + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} A = 2B + k2\pi & (2) \\ A = \pi(1 + 2k) & (3) \end{array}\right.$$

- Biện luận (2) : $0 < A < \pi \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 2B + k2\pi < \pi$

$$\Leftrightarrow \quad -2B < k2\pi < \pi - 2B \quad \Leftrightarrow \quad -B < k\pi < \frac{\pi}{2} - B$$

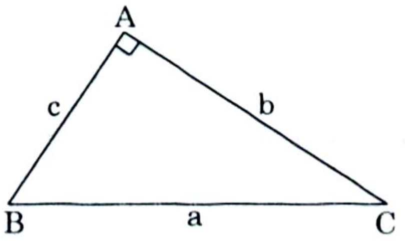
$$\Rightarrow \quad -\pi < B < k\pi < \frac{\pi}{2} - B < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad -1 < k < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad k = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 2B$$

- Biện luận (3) : $0 < A < \pi \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \pi(1 + 2k)\pi < \pi$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < 1 + 2k < 1 \quad \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 0\ (k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad k \in \varnothing.$$

BÀi 109. Ta có : $b = a.\sin B$, $c = a.\cos B$ và a, $\sqrt{\frac{2}{3}}b$, c lập thành cấp số nhân



$$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{\frac{2}{3}}b\right)^2 = ac \quad \Leftrightarrow \quad 2b^2 = 3ac$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(a.\sin B)^2 = 3a(a\cos B)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 B = 3\cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 B + 3\cos B - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos B = \frac{1}{2} \\ \cos B = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \cos B = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad B = 60^o, C = 30^o.$$

BÀI 110.

a) a, b, c là ba cạnh của một tam giác :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + c > a \\ c + a > b \\ a + b > c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 4x + 6 > x^2 + 2x + 3 \\ 2x^2 + 6x + 8 > x^2 + 1 \\ 2x^2 + 2x + 4 > x^2 + 4x + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 3 > 0 \text{ (luôn đúng)} \\ x^2 + 6x + 7 > 0 \\ x^2 - 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > -3 + \sqrt{2} \\ x < -3 - \sqrt{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < 1 + \sqrt{2} \\ x < 1 - \sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3 - \sqrt{2} \\ x > 1 + \sqrt{2} \\ 3 + \sqrt{2} < x < 1 - \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

b) Ta có :

- $S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

$$p = \frac{1}{2}(3x^2 + 6x + 9) = \frac{3}{2}(x^2 + 2x + 3)$$

$$p - a = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 3); \qquad p - b = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 7);$$

$$p - c = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 1)$$

$$\text{Vậy : } r = \sqrt{\frac{\frac{1}{8}(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 6x + 7)}{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 6x + 7)}$$

- $S = \dfrac{abc}{4R} = p(p-a)(p-b)(p-c)$

$$\Rightarrow R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$= \frac{(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 1)(x^2 + 4x + 5)}{4\sqrt{\frac{3}{2}(x^2 + 2x + 3).\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 3).\frac{1}{2}(x^2 + 6x + 7).\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 1)}}$$

$$= \frac{(x^2 + 1)(x^2 + 4x + 5)}{\sqrt{3(x^2 + 6x + 7)(x^2 - 2x - 1)}}.$$

BÀI 111. Theo định lí hàm sin : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b - c}{\sin B - \sin C}$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{\sin\varphi} = \frac{l}{2\sin\frac{B + C}{2}.\sin\frac{B - C}{2}} = \frac{l}{2\sin\frac{\varphi}{2}.\cos\frac{B - C}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2\sin\frac{\varphi}{2}.\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{l}{2\sin\frac{\varphi}{2}.\cos\frac{B - C}{2}} \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{B - C}{2} = \frac{l}{a}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad B - C = 2\arccos\left(\frac{l}{a}.\cos\frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{và} \quad B + C = \pi - \varphi$$

Nên :
$$\begin{cases} B = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi}{2} + \arccos\left(\dfrac{l}{a}\cos\dfrac{\varphi}{2}\right) \\ C = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi}{2} - \arccos\left(\dfrac{l}{a}\cos\dfrac{\varphi}{2}\right) \end{cases}$$

- Bạn đọc để ý : $0 \le \left|\dfrac{B - C}{2}\right| < \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\dfrac{B - C}{2} \in (0; 1]$

Nên ta phải thêm điều kiện : $0 < \dfrac{l}{a}\cos\dfrac{\varphi}{2} \le 2.$

BÀI 112.

a) A, B, C lập thành cấp số cộng, nên : $2B = A + C$

$\Rightarrow B = \dfrac{\pi}{3}$ (vì $A + B + C = \pi$).

Hơn nữa : $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A + C}{2}.\cos\frac{A - C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{A - C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A - C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |A - C| = \frac{\pi}{3}$$

Cùng với : $A + C = \dfrac{2\pi}{3}$

$$\text{Suy ra : } (A, B, C) = \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{6}\right) \\ \left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}\right.$$

b) Theo định lí hàm sin :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{100}{\dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}} = \frac{200}{3 + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad (a, b, c) = \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{200}{3 + \sqrt{3}}; \dfrac{100}{\sqrt{3} + 1}; \dfrac{100}{3 + \sqrt{3}}\right) \\ \left(\dfrac{100}{3 + \sqrt{3}}; \dfrac{100}{\sqrt{3} + 1}; \dfrac{200}{3 + \sqrt{3}}\right). \end{array}\right.$$

BÀI 113. Ta có : $\tan A.\tan C = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan A, \tan C$ cùng dấu vì trong tam giác không thể có hai góc tù nên : $\tan A, \tan C > 0 \Leftrightarrow A, C$ nhọn.

(Hơn nữa: $\tan A.\tan B = -2 \Rightarrow \tan B < 0 \Rightarrow B$ tù).

Mặt khác : $A + B = \pi - C$

$$\Rightarrow \quad \tan(A + B) = \tan(\pi - C) \quad \Rightarrow \quad \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B} = -\tan C$$

$$\Rightarrow \quad \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A.\tan B.\tan C$$

$$\Rightarrow \quad \tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2 A + \tan A.\tan B + \tan A.\tan C = (\tan A.\tan B)(\tan A.\tan C)$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2 A - 2 + \frac{1}{2} = (-2)\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \tan^2 A = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \tan A = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (vì A nhọn)} \quad \text{và : } \quad \tan B = -2\sqrt{2}, \ \tan C = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy : $\begin{cases} A = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ B = \arctan(-2\sqrt{2}) \\ C = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{cases}$

BÀI 114.

a) Ta có : $b + c = a\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin B + \sin C = \sin A\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{B + C}{2}.\cos\frac{B - C}{2} = \sin A\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{A}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A}{2} = 30^\circ \quad \Rightarrow \quad A = 60^\circ$$

Suy ra : $\begin{cases} B + C = 120^\circ \\ B - C = 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 105^\circ \\ C = 15^\circ \end{cases}$ Vậy : $\begin{cases} A = 60^\circ \\ B = 105^\circ \\ C = 15^\circ. \end{cases}$

b) $b^2 - c^2 = 4R^2(\sin^2 B - \sin^2 C) = 2R^2(1 - \cos 2B - 1 + \cos 2C)$

$= 2R^2(\cos 2C - \cos 2B) = 4R^2.\sin(C + B).\sin(B - C)$

$= 4R^2.\sin A.1 = (2R\sin A).2R = a.2R = 2Ra$

$\Rightarrow$ (đpcm).

BÀI 115.

a) Ta có : $2h_a = h_b + h_c \Leftrightarrow 2.\frac{2S}{a} = \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \Leftrightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2R\sin A} = \frac{1}{2R\sin B} + \frac{1}{2R\sin C} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}.$$

b) Câu a) $\Leftrightarrow 2\sin B.\sin C = \sin A(\sin B + \sin C)$

$$\Leftrightarrow \cos(B - C) - \cos(B + C) = \frac{\sqrt{3}}{2}.2\sin\frac{B + C}{2}.\cos\frac{B - C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(B - C) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.\cos\frac{B - C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{B - C}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\cos\frac{B - C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{B - C}{2} - 3\cos\frac{B - C}{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{B - C}{2} = 1\\ \cos\frac{B - C}{2} = -\frac{1}{4} \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

$$\left(\text{vì : } 0 \le \left|\frac{B - C}{2}\right| < 90^\circ \Rightarrow \cos\frac{B - C}{2} \in (0; 1]\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B - C}{2} = 1 \Leftrightarrow B = C = 60^\circ$$

Vậy : $A = B = C = 60^\circ$ tức là ΔABC đều.

BÀI 116.

a) Ta có : $S_{\Delta AMB} = S_{\Delta BNC} = S_{\Delta CPA} = \frac{S}{2}$

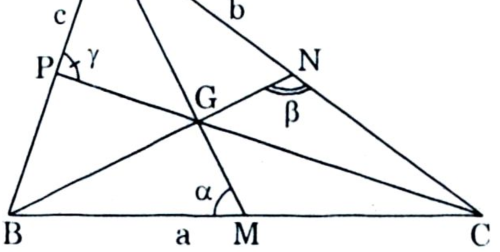
Xét ΔAMP : $\cot\alpha = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{4S_{\Delta AMB}}$

$$= \frac{\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - c^2}{2S} = \frac{b^2 - c^2}{4S}$$

Chứng minh tương tự :

$$\cot\beta = \frac{c^2 - a^2}{4S}; \quad \cot\gamma = \frac{a^2 - b^2}{4S}$$

Vậy : $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = 0$.



b) $p = \dfrac{1}{2}(a + b + c) = \dfrac{15}{2}$

$$p - a = \frac{9}{2};\ p - b = \frac{5}{2};\ p - c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S^2 = P(p - a)(p - b)(p - c) = \frac{9.25.3}{16} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy :} \begin{cases} \cot\alpha = \dfrac{b^2 - c^2}{4S} = -\dfrac{8}{5\sqrt{3}} \\ \cot\beta = \dfrac{c^2 - a^2}{4S} = \dfrac{8}{3\sqrt{3}} \\ \cot\gamma = \dfrac{a^2 - b^2}{4S} = -\dfrac{16}{15\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \alpha = \operatorname{arccot}\left(-\dfrac{8}{5\sqrt{3}}\right) \\ \beta = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{8}{3\sqrt{3}}\right) \\ \gamma = \operatorname{arccot}\left(-\dfrac{16}{15\sqrt{3}}\right). \end{cases}$$

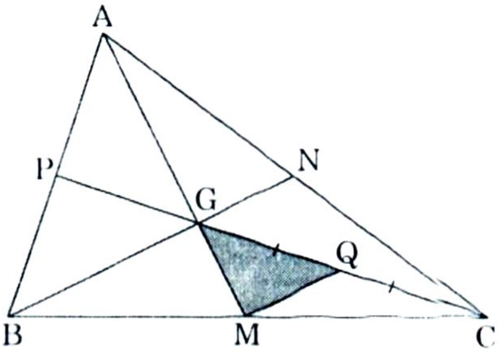
BÀI 117.

a) Gọi AM, BN, CP là ba trung tuyến của ΔABC và G, Q là trọng tâm, trung điểm CG tương ứng. Xét ΔMGQ có :

$$MG = \frac{1}{3}m_a, \quad MQ = \frac{1}{3}m_b, \quad GQ = \frac{1}{3}m_c$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}m_a, \dfrac{1}{3}m_b, \dfrac{1}{3}m_c$ là độ dài ba cạnh của ΔMGQ

$\Rightarrow m_a, m_b, m_c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác (nào đó).



b) Ta có : $S = 3S_{\Delta GBC} = 3.2S_{\Delta GMC}$

$= 3.2.2.S_{\Delta GMQ} = 12.S_{\Delta GMQ}$

Theo công thức Hêrông :

$$S_{\Delta GMQ} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{1}{3}m_a + \frac{1}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c\right)\left(\frac{1}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c - \frac{1}{3}m_a\right)}\ .$$

$$.\sqrt{\left(\frac{1}{3}m_c + \frac{1}{3}m_a - \frac{1}{3}m_b\right)\left(\frac{1}{3}m_a + \frac{1}{3}m_b - \frac{1}{3}m_c\right)}$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{9}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_c + m_a - m_b)(m_a + m_b - m_c)}$$

$$= \frac{1}{36}\sqrt{2m.2(m - m_a).2(m - m_b).2(m - m_c)}$$

$$= \frac{1}{9}\sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)} \quad (\text{với } 2m = m_a + m_b + m_c)$$

$$\Rightarrow \quad S = 12S_{\Delta GMQ} = \frac{4}{3}\sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}.$$

■ **Chú ý :** Ta có thể trình bày cách khác, như sau :

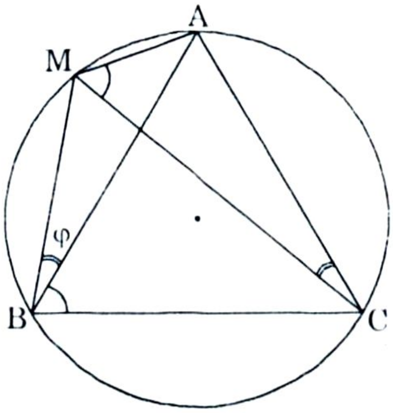
ΔGMQ có các cạnh là $\frac{1}{3}m_a$, $\frac{1}{3}m_b$, $\frac{1}{3}m_c$. Nên ΔGMQ đồng dạng với một tam giác có các cạnh là m_a, m_b, m_c với tỉ lệ đồng dạng là $\frac{1}{3}$. Do đó theo công thức Hêrông :

$$S_{\Delta GMQ} = \left(\frac{1}{3}\right)^2\sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}$$

$$\Rightarrow \quad S_{\Delta GMQ} = \frac{1}{9}\sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}$$

Vậy : $S = 12S_{\Delta GMQ} = \frac{4}{3}\sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)} \quad \Rightarrow \quad$ (đpcm).

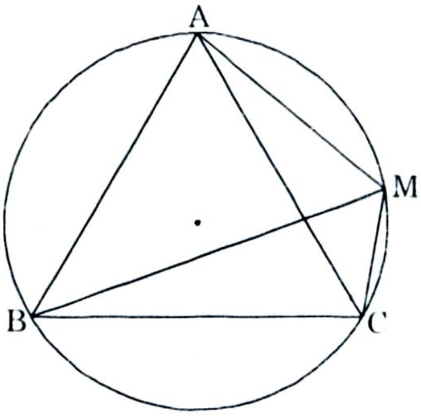
BÀI 118.



- *Trường hợp 1 :* (M nằm trên cung nhỏ AB)

$$\begin{aligned} MA + MB &= 2R\sin\varphi + 2R\sin(60 - \varphi) \\ &= 2R[\sin\varphi + \sin(60 - \varphi)] \\ &= 2R.2\sin.\cos(\varphi - 30^\circ) \\ &= 2R.\sin(\varphi + 60^\circ) \\ &= MC \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad MC = 3$



- *Trường hợp 2 :* (M nằm trên cung nhỏ AC, bạn đọc tự kiểm tra điều này).

  Chứng minh tương tự :

  $MB = MA + MC$

  $\Rightarrow \quad 2 = 1 + MC$

  $\Rightarrow \quad MC = 1$

■ **Chú ý :**

1. Bạn đọc có thể xem bài 62 sẽ hiểu rõ hơn.
2. Có thể giải cách khác cho bài này :

   Xét ΔMAB (trong trường hợp 1) :

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA.MB.\cos120^\circ = 1 + 4 - 2.1.2\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 + 2 = 7$$

$\Rightarrow \quad AB^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad AC^2 = 7$

$$\Rightarrow \quad 7 = AC^2 + MA^2 - 2MA.MC.\cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad 7 = 1 + MC^2 - MC \quad \Leftrightarrow \quad MC^2 - MC - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} MC = 3 \\ MC = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad MC = 3$$

Với cách này trong trường hợp 2, ta cũng tính được MC = 1.

3. Nếu dùng định lí Ptôlêmê thì thấy ngay :

$$MC = MA + MB \text{ (trong trường hợp 1)} \quad \Rightarrow \quad MC = 3 \ldots$$

BÀI 119.

a) Ta có : $2p = a + b + c = (a + c) + b = 2b + b = 3b$ (vì $a + c = 2b$)

$$\Rightarrow \quad S = pr = \frac{abc}{4R} \quad \Rightarrow \quad \frac{3b}{2}.r = \frac{abc}{4R} \quad \Rightarrow \quad ac = 6Rr$$

b) Từ điều kiện : $a + c = 2b \quad \Leftrightarrow \quad 2R\sin A + 2R\sin C = 2(2R\sin B)$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A - \sin C = 2\sin B \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2} = 4\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2} = 2\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A-C}{2} = 2\sin\frac{B}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\frac{A-C}{2} = 2\sin 15^\circ$$

Mà : $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ.\cos 30^\circ - \sin 30^\circ.\cos 45^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \in (0;\, 1) \Rightarrow A - C = 2\arccos\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Vậy : } \begin{cases} A + C = 150^\circ \\ A - C = 2\arccos\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 75^\circ + \arccos\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) \\ C = 75^\circ - \arccos\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

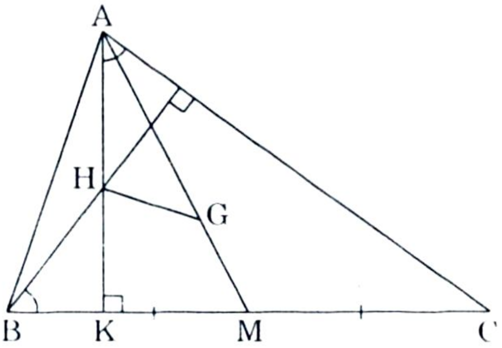
■ **Chú ý :** Có thể tính $\sin 15^\circ$ như sau :

$$\sin^2 15^\circ = \frac{1-\cos^2 30^\circ}{2} = \frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{16}$$

$$= \frac{(\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{6}.\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{16} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{16}$$

$$\Rightarrow \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

BÀI 120.



a) Ta có : $\Delta KHB \backsim \Delta KCA$ nên :

$$\frac{BK}{AK} = \frac{HK}{KC} \Rightarrow AK.HK = BK.KC$$

Vì : HG // BC $\Rightarrow HK = \frac{1}{3}AK$

$$\Rightarrow AK.\frac{AK}{3} = BK.KC$$

$$\Rightarrow AK^2 = 3BK.KC \Rightarrow \tan B.\tan C = \frac{AK}{BK}.\frac{AK}{KC} = \frac{AK^2}{BK.KC} = 3$$

Vậy : $\tan B.\tan C = 3$.

b) Theo câu a) : $\tan B.\tan C = 3 \Rightarrow \sin B.\sin C = 3\cos B.\cos C$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[\cos(B - C) - \cos(B + C)] = \frac{3}{2}[\cos(B + C) + \cos(B - C)]$$

$$\Rightarrow \cos(B - C) + \cos A = 3[-\cos A + \cos(B - C)]$$

$$\Rightarrow 4\cos A = 2\cos(B - C) \Rightarrow \cos(B - C) = 2\cos A \Rightarrow \text{(đpcm)}.$$

c) Ta có : $A + B + C = \pi \Rightarrow \pi - A = B + C$

$$\Rightarrow \tan(\pi - A) = \tan(B + C) \Rightarrow -\tan A = \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B.\tan C}$$

$$\Rightarrow -2 = \frac{\tan B + \tan C}{-2} \Rightarrow \tan B + \tan C = 4$$

Vậy : $\begin{cases} \tan B + \tan C = 4 \\ \tan B.\tan C = 3 \end{cases}$

Nên tanB, tanC là nghiệm phương trình : $X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 3 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow (\tan B, \tan C) = \left[\begin{array}{l} (1; 3) \\ (3; 1) \end{array}\right. \Rightarrow (B, C) = \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\pi}{4}; \arctan 3\right) \\ \left(\arctan 3; \frac{\pi}{4}\right) \end{array}\right.$$

Hơn nữa, theo định lí hàm sin : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{a.\sin B}{\sin A} \\ c = \dfrac{a.\sin C}{\sin A} \end{cases}$

Mà : $\frac{1}{\sin^2 A} = 1 + \cot^2 A = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\frac{1}{\sin^2 B} = 1 + \cot^2 B = 1 + 1 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \sin B = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

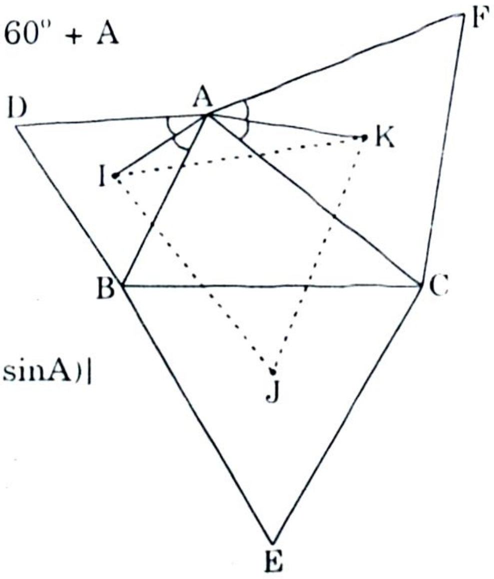
(hoặc $\frac{1}{\sin^2 B} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \Rightarrow \sin B = \frac{3}{\sqrt{10}}$)

$$\frac{1}{\sin^2 C} = 1 + \cot^2 C = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \qquad \Rightarrow \qquad \sin C = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

(hoặc $\frac{1}{\sin^2 C} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \sin C = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

Lúc đó : $(b, c) = \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \\ \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \end{array}\right.$.

BÀi 121.



a) Xét ΔAIK : $IA = \frac{c}{\sqrt{3}}$, $KA = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $\widehat{IAK} = 60^\circ + A$

Theo định lí hàm cos :

$$IK^2 = IA^2 + KA^2 - 2IA.KA.\cos(60^\circ + A)$$

$$= \frac{c^2}{3} + \frac{b^2}{3} - 2\frac{bc}{3}\cos(60^\circ + A)$$

$$= \frac{1}{3}[b^2 + c^2 - 2bc(\cos 60^\circ.\cos A - \sin 60^\circ.\sin A)]$$

$$= \frac{1}{3}[b^2 + c^2 - bc(\cos A - \sqrt{3}\sin A)]$$

$$= \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - bc.\cos A + \sqrt{3}\,bc.\sin A)$$

$$= \frac{1}{3}\left(b^2 + c^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + 2\sqrt{3}.S\right) = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\,S)$$

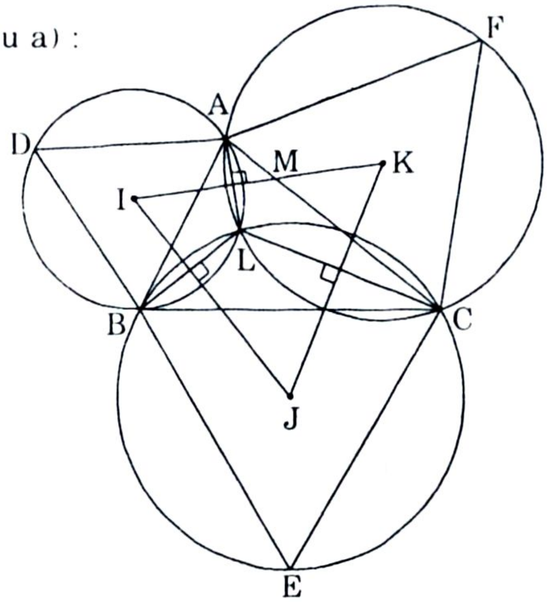
Chứng minh tương tự : $KJ^2 = JI^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\,S)$

Vậy ΔIJK đều.

b) Ta có : $IJ = JK = KI = \sqrt{\frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S)}$

$$= \sqrt{\frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right)}.$$

■ **Chú ý :** Có thể làm cách khác cho câu a) :



Dựng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, BCE, CAF cắt nhau tại L (Bạn tự chứng minh chúng đồng quy tại 1 điểm L, xem như một bài tập nhỏ).

$$\text{Mặt khác : } \left.\begin{array}{l} \widehat{ALB} = 120^\circ \\ LA \perp IK \\ LB \perp IJ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{JIK} = 60^\circ$$

Chứng minh tương tự : $\widehat{IKJ} = 60^\circ$.

Vậy ΔIJK đều $\Rightarrow$ (đpcm).

BÀI TẬP TỰ GIẢI

122. Cho ΔABC có : $b^2 + c^2 = 5a^2$.

a) Cho $a = 2$, $A = 30^\circ$. Tính b, c.

b) Cho $a = m > 0$, $A = \varphi \in (0; \pi)$. Tính b, c theo m, φ. Biện luận.

123. Cho ΔABC, $\tan A.\tan B = m$, $\tan B.\tan C = n$.

Tính tanA, tanB, tanC theo m, n.

124. Cho ΔABC, $\cos A + \cos B + \cos C = m \in \left(1; \frac{3}{2}\right]$ và các góc A, B, C lập thành cấp số cộng.

a) Tính A, B, C theo m.

b) Cho $p = n > 0$. Tính a, b, c theo m, n.

125*. Cho ΔABC có ba góc nhọn, AA', BB', CC' là ba đường cao.

a) Tính A'B', B'C', C'A' theo a, b, c.

b) Tính $S_{\Delta A'B'C'}$ theo a, b, c ($a = BC$, $b = CA$, $c = AB$).

126*. a) Cho ΔABC. $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$.

Gọi H, O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tính HO.

b) Với $m_a = 5$, $m_b = 4$, $m_c = 3$, tính a, b, c.

Từ đó chứng minh $A > 45^\circ$.

127. Cho ΔABC cân tại A, $A = 80^\circ$. Trên cạnh BC, AC lấy hai điểm D và E sao cho $\widehat{BAD} = 50^\circ$, $\widehat{ABE} = 30^\circ$. Tính $\widehat{BED}$.

Đáp số : 40°.

128. Cho ΔABC có a, b, c lập thành cấp số cộng, $r = \frac{2}{3}$.

Chứng minh rằng : $b - a = c - b = \dfrac{\sin\frac{C - A}{2}}{\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}}$.

129. Cho A, B, C là 3 góc nhọn thỏa : $\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$.

Tính A + B + C.

Đáp số : π.

130*. Cho ΔABC, CM là trung tuyến, $\widehat{ACM} = \alpha$, $\widehat{BCM} = \beta$.

Tính A, B, C theo α, β.

131*. Cho ΔABC có $A = 90^o$, $l_a.l_c = 1$, và $BC = a > 0$. Tính B, C, r theo a.

132. a) Cho ΔABC có $\begin{cases} 3\sin\frac{A}{2} = 1 \\ r_a = 2r \\ h_a = 2 \end{cases}$. Tính A, B, C.

b) Cho hình thang vuông tại A, D, diện tích là S, $\widehat{BCD} = \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $BD = CD$ (CD là đáy lớn). Tính các cạnh hình thang theo S và α.

133. Cho ΔABC, AD, BE, CF là ba đường phân giác trong ($a = BC$, $b = CA$, $c = AB$).

a) Tính $S_{\Delta DEF}$ theo a, b, c.

b) Cho $S_{\Delta ABC} = 4S_{\Delta DEF}$. Tính A, B, C.

134. Cho ΔABC. Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC; R_1, R_2, R_3 lần lượt là các bán kính của các đường tròn ngoại tiếp ΔOBC, ΔOCA, ΔOAB.

a) Tính R_1, R_2, R_3 theo a, b, c ($a = BC$, $b = CA$, $c = AB$).

b) Tính $\dfrac{R_1.R_2.R_3}{R^2.r}$.

c)* Chứng minh : $p^2 + r^2 + 4Rr = 2R(h_a + h_b + h_c)$.

d)* Cho $r = 1$ và $h_a, h_b, h_c \in \mathbf{N}$. Tính a, b, c.

e)* Tính $\dfrac{m_a}{l_a}$, $\dfrac{l_a}{h_a}$ theo a, b, c. Từ đó suy ra kết quả $h_a \le l_a \le m_a$.

Chương 2. NHẬN DẠNG TAM GIÁC
(không dùng bất đẳng thức)

- **Phương pháp chung :**

Để làm dạng toán này, ta biến đổi các biểu thức lượng giác (trong tam giác) về dạng :

1. $a.b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$

2. $a.b.c = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{array}\right.$

3. $a_1.a_2...a_n = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ ..... \\ a_n = 0 \end{array}\right.$

Hay các dạng đẳng thức đơn giản :

4. $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$

5. $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

6. $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$

A. NHẬN DẠNG TAM GIÁC ĐỀU

BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

BÀI 135. Cho ΔABC thỏa : $\dfrac{a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C}{a.\sin A + b.\sin B + c.\sin C} = \dfrac{2p}{9R}$.

Chứng minh ΔABC đều.

- ***Hướng dẫn :*** Sử dụng kết quả bài 5 :

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A.\sin B.\sin C$$

và định lí hàm sin.

BÀI 136. Cho ΔABC thỏa : $\cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{3}{2}$. Nhận dạng tam giác.

- ***Hướng dẫn :*** Biến đổi : $\cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{3}{2}$

về dạng tổng các bình phương.

BÀI 137. Cho ΔABC thỏa : $2(a^3 + b^3 + c^3) = a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2)$.

Chứng minh ΔABC đều.

■ ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

$$a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) = ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$$

BÀI 138. Cho ΔABC thỏa : $\begin{cases} \cos B.\cos C = \dfrac{1}{4} & (1) \\ a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} & (2) \end{cases}$

Chứng minh ΔABC đều.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos.

BÀI 139. Cho ΔABC thỏa : $\begin{cases} a = 2b.\cos C & (1) \\ \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 & (2) \end{cases}$

thì ΔABC đều.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos.

BÀI 140. Cho ΔABC thỏa : $\begin{cases} a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} & (1) \\ \sin B.\sin C = \dfrac{3}{4} & (2) \end{cases}$

Chứng minh ΔABC đều.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos.

BÀI 141. Cho ΔABC thỏa : $h_a + h_b + h_c = 9r$ thì ΔABC đều.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức :

$$S = pr = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} h_a = \dfrac{(a + b + c)r}{a} \\ h_b = \dfrac{(a + b + c)r}{b} \\ h_c = \dfrac{(a + b + c)r}{c} \end{cases}$$

BÀI 142. Cho ΔABC có : $\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2} = \dfrac{\sqrt{ab}}{4c}$. Chứng minh ΔABC đều.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos.

BÀI 143. Cho ΔABC thỏa : $\begin{cases} \sin B + \sin C = 2\sin A & (1) \\ \tan B + \tan C = 2\tan A & (2) \end{cases}$

Chứng minh ΔABC đều.

- ***Hướng dẫn :***

- *Cách 1 :*

Bạn đọc lưu ý công thức :

$$\begin{cases} cotA = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \\ cotB = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} \\ cotC = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} \end{cases}$$

- *Cách 2 :*

Bạn đọc cố gắng tính :

$$\begin{cases} tan\dfrac{B}{2} + tan\dfrac{C}{2} = ? \\ tan\dfrac{B}{2}.tan\dfrac{C}{2} = ? \end{cases}$$

BÀI 144. Cho ΔABC có $b + c = \sqrt{3}h_a + \dfrac{a}{2}$. Chứng minh ΔABC đều.

- ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin biến đổi $b + c = \sqrt{3}h_a + \dfrac{a}{2}$

về dạng : $sinB\left[1 - sin\left(C + \dfrac{\pi}{6}\right)\right] + sinC\left[1 - sin\left(B + \dfrac{\pi}{6}\right)\right] = 0$

BÀI 145. Cho ΔABC thỏa : $2(a.cosA + b.cosB + c.cosC) = a + b + c$.

Chứng minh ΔABC đều.

- ***Hướng dẫn :*** Sử dụng các công thức sau :

- $sin2x = 2sinxcosx$ (công thức nhân 2)
- $sinA + sinB + sinC = 4cos\dfrac{A}{2}cos\dfrac{B}{2}cos\dfrac{C}{2}$ (Bạn đọc xem lại bài 4)
- $sin2A + sin2B + sin2C = 4sinA.sinB.sinC$ (Bạn đọc xem lại bài 5)

BÀI 146. Cho ΔABC thỏa : $\dfrac{1}{sinA} + \dfrac{1}{sinB} + \dfrac{1}{sinC} - (cotA + cotB + cotC) = \sqrt{3}$.

Chứng minh ΔABC đều.

- ***Hướng dẫn :*** Sử dụng các công thức :

- $tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{1 - cosA}{sinA} = \dfrac{1}{sinA} - cotA$
- $tan\dfrac{A}{2}tan\dfrac{B}{2} + tan\dfrac{B}{2}tan\dfrac{C}{2} + tan\dfrac{C}{2}tan\dfrac{A}{2} = 1$ (Xem bài 20)
- $(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx) = \dfrac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

BÀI 147. Cho ΔABC thỏa : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{3}{2}$.

Chứng minh ΔABC đều.

- ■ ***Hướng dẫn :*** Đặt ẩn phụ : $2x = b + c$; $2y = c + a$; $2z = a + b$.

BÀI 148. Cho ΔABC thỏa : $3S = 2R^2(\sin^3A + \sin^3B + \sin^3C)$.

Chứng minh ΔABC đều.

- ■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng định lí hàm sin và hằng đẳng thức :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

LỜI GIẢI

BÀI 135.

Giả thiết $\Leftrightarrow \dfrac{R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)}{\frac{1}{2R}(a^2 + b^2 + c^2)} = \dfrac{a + b + c}{9R}$

$\Leftrightarrow 18R^3(4\sin A.\sin B.\sin C) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow 9abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow 9abc = a^3 + a(b^2 + c^2) + b^3 + b(c^2 + a^2) + c^3 + c(a^2 + b^2)$

$\Leftrightarrow a(b^2 + c^2 - 2bc) + b(c^2 + a^2 - 2ca) + c(a^2 + b^2 - 2ab) + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$\Leftrightarrow a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 + \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = 0$

$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

- ■ **Chú ý :**

1. Trong lúc chứng minh, ta sử dụng công thức quen thuộc :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

Bạn đọc có thể chứng minh lại, hoặc tìm đọc ở "Chuyên đề Bất đẳng thức" của tác giả.

2. Ở đây, ta có thể dùng bất đẳng thức Cauchy trực tiếp như sau :

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$; $\quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

$$\Rightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9abc$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow a = b = c$.

Vậy : $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = 9abc \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ đều.

BÀI 136. Ta có : $\cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{3}{2}$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{A + B}{3}.\cos\frac{A - B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A - B}{2} - \frac{1}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2} = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\sin^2\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A - B}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{A - B}{2}\right] + \frac{1}{4}\sin^2\frac{A - B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A - B}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{A - B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{A - B}{2} \\ \sin\dfrac{A - B}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{2} \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 60^\circ \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

- **Chú ý :** Có thể dùng tính chất tam thức bậc 2 để làm bài này.

Quả vậy : (1) $\Leftrightarrow f(t) = 2t^2 - 2\cos\dfrac{A - B}{2}.t + \dfrac{1}{2} = 0$ (với $t = \sin\dfrac{C}{2} \in (0; 1)$)

Phương trình này luôn có nghiệm (?!).

Nên : $\Delta' = \cos^2\dfrac{A - B}{2} - 1 = -\sin^2\dfrac{A - B}{2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\dfrac{A - B}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad A = B$

Khi đó : $t = \dfrac{b'}{a} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{A - B}{2} = \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad C = 60^\circ$.

Vậy : $\begin{cases} A = B \\ C = 60^\circ \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ đều.

BÀI 137. Ta có :

$$2(a^3 + b^3 + c^3) = a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(a^3 + b^3 + c^3) = ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$$

$$\Leftrightarrow \quad [a^3 + b^3 - ab(a + b)] + [b^3 + c^3 - bc(b + c)] + [c^3 + a^3 - ca(c + a)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a + b)(a - b)^2 + (b + c)(b - c)^2 + (c + a)(c - a)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad a = b = c \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ đều $\quad \Rightarrow \quad$ (đpcm).

BÀI 138.

$$(2) \Leftrightarrow \quad a^3 - b^3 - c^3 = a^3 - a^2(b + c) \quad \Leftrightarrow \quad b^3 + c^3 = a^2(b + c)$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 - bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A = 60^\circ$$

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}[\cos(B + C) + \cos(B - C)] = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + \cos(B - C) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(B - C) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = C \text{ (vì } 0 \le |B - C| < \pi)$$

$$\text{Vậy : } \begin{cases} A = 60^\circ \\ B = C \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC \text{ đều.}$$

BÀI 139.

$$(2) \Leftrightarrow \quad b^3 + c^3 - a^3 = a^2(b + c - a) \quad \Leftrightarrow \quad b^3 + c^3 = a^2(b + c)$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 - bc = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A = 60^\circ$$

$$(1) \Leftrightarrow \quad \cos C = \frac{a}{2b}$$

$$\Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C = a^2 + b^2 - 2ab.\frac{a}{2b} = b^2$$

$$\Rightarrow \quad c = b$$

$$\text{Vậy : } \begin{cases} A = 60^\circ \\ c = b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC \text{ đều.}$$

BÀI 140.

$$(1) \Leftrightarrow \quad a^3 - a^2(b + c) = a^3 - b^3 - c^3$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2(b + c) = b^3 + c^3 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = b^2 + c^2 - bc$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A = 60^\circ$$

$$(2) \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}[\cos(B - C) - \cos(B + C)] = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\cos(B - C) + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(B - C) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad B = C$$

$$\text{Vậy : } \begin{cases} A = 60^\circ \\ B = C \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC \text{ đều.}$$

BÀI 141. Ta có : $h_a + h_b + h_c = 9r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} = 9r$

$$\Leftrightarrow \quad 2S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 9r \quad \Leftrightarrow \quad 2pr\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 9r$$

$$\Leftrightarrow \quad (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 9 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC \text{ đều.}$$

■ **Chú ý :** Xét (1). Ta có thể dùng BĐT Cauchy trực tiếp, như sau :

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 9. \quad \text{Dấu "=" } \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Hoặc theo BĐT B.C.S :

$$9 = \left(\sqrt{a}.\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b}.\frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c}.\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \leq (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Dấu "=" $\Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} \Leftrightarrow a = b = c \ldots$

BÀI 142. Từ giả thiết $\Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2}.\sin^2\frac{B}{2} = \left(\frac{\sqrt{ab}}{4c}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(1 - \cos A)(1 - \cos B) = \frac{ab}{16c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)\left(1 - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right) = \frac{ab}{16c^2}$$

$$\Leftrightarrow [a^2 - (b - c)^2][b^2 - (c - a)^2] = a^2 - b^2 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(b - c)^2 = 0\\(c - a)^2 = 0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC \text{ đều.}$$

■ **Chú ý :** Có thể giải cách khác, như sau :

Theo định lí hàm cos :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos A)$$

$$\geq 2bc(1 - \cos A) = 4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a \geq 2\sqrt{bc}\sin\frac{A}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}. \quad \text{Dấu "=" } \Leftrightarrow a = b.$$

Chứng minh tương tự : $\sin\frac{B}{2} \le \frac{b}{2\sqrt{ca}}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow$ c = a.

Vậy : $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2} \le \frac{\sqrt{ab}}{4c}$.

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = a \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow$ (đpcm).

BÀI 143.

- *Cách 1 :*

(1) $\Leftrightarrow$ $b + c = 2a$ (định lí hàm sin)

(2) $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{\cot B} + \frac{1}{\cot C} = \frac{2}{\cot A}$

$$\Leftrightarrow \frac{4S}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{4S}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{8S}{b^2 + c^2 - a^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2(b^2 + c^2 - a^2) = a^4 - (b^2 - c^2)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2(b^2 + c^2 - a^2) = a^4 - (b + c)^2(b - c)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2(b^2 + c^2 - a^2) = a^4 - 4a^2(b - c)^2 \text{ (vì } b + c = 2a)$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = a^2 - 4(b - c)^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2 - 4(b - c)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(b^2 + c^2) = (2a)^2 - 8(b - c)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(b^2 + c^2) = (b + c)^2 - 8(b - c)^2$$

$$\Leftrightarrow (b - c)^2 = -8(b - c)^2 \Leftrightarrow 9(b - c)^2 = 0 \Leftrightarrow b = c$$

Vậy : $\begin{cases} b + c = 2a \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

- *Cách 2 :* Ta có : $\sin B + \sin C = 2\sin A$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{B + C}{2}.\cos\frac{B - C}{2} = 2\sin A$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B - C}{2} = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B + C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B - C}{2} = 2\cos\frac{B + C}{2} \text{ (vì } \cos\frac{A}{2} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = 2\left(\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} = 3\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$$

Hơn nữa : $\tan B + \tan C = 2\tan A \Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = 3\tan A$

$\Leftrightarrow \quad \tan A.\tan B.\tan C = 3\tan A$

$\Leftrightarrow \quad \tan B.\tan C = 3 \quad$ (vì tanA luôn $\neq 0$)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}}{\left(1-\tan^2\frac{B}{2}\right)\left(1-\tan^2\frac{C}{2}\right)} = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{4}{3}}{1-\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2+\frac{2}{3}+\frac{1}{9}} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2 = \frac{12}{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{C}{2}\right)^2 = \left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2 - 4\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} = \frac{12}{9} - 4.\frac{1}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{B}{2} = \tan\frac{C}{2} \quad \Rightarrow \quad B = C \text{ (vì } 0 < \frac{B}{2}, \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}\text{)}$$

Vậy : $\begin{cases} \sin B + \sin C = 2\sin A \\ B = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin B = \sin A \\ B = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = A \\ B = C \end{cases} \Leftrightarrow$ ΔABC đều.

■ **Chú ý :**

1. Trong tam giác không vuông :

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C \quad \text{(xem bài 9)}$$

2. Ta có thể chứng minh $\tan B.\tan C = 3$, theo cách khác :

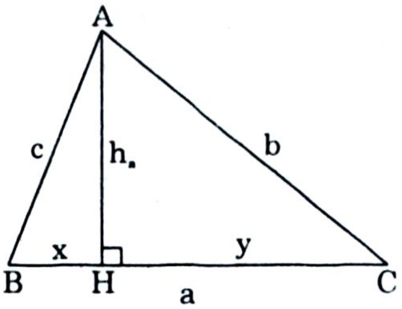
Thật vậy : $\tan B + \tan C = 2\tan A = 2\tan[\pi - (B + C)]$

$$\Leftrightarrow \quad \tan B + \tan C = -2\tan(B + C) = -2\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B.\tan C}$$

(vì trong ΔABC, tanA luôn $\neq 0 \Rightarrow \tan B + \tan C = 2\tan A \neq 0$)

Nên : $1 = \dfrac{-2}{1 - \tan B.\tan C} \quad \Leftrightarrow \quad \tan B.\tan C = 3.$

BÀI 144.



Theo định lí hàm sin :

$a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C,$

và $\quad h_a = b.\sin C = 2R.\sin B.\sin C.$

Vì vậy : $b + c = \sqrt{3}h_a + \dfrac{a}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 2(\sin B + \sin C) = 2\sqrt{3}\sin B.\sin C + \sin A$

$\Leftrightarrow \quad \sin B + \sin C = \sqrt{3}\sin B.\sin C + \dfrac{1}{2}\sin(B + C)$

$$\Leftrightarrow \quad \sin B + \sin C = \sqrt{3}\sin B.\sin C + \frac{1}{2}(\sin B.\cos C + \sin C.\cos B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin B\left[1 - \left(\frac{1}{2}\cos C + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)\right] + \sin C\left[1 - \left(\frac{1}{2}\cos B + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin B\left[1 - \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right)\right] + \sin C\left[1 - \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 0$$

Vì : $\sin B, \sin C > 0$ và $1 - \sin x \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ nên :

$$\begin{cases} \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{\pi}{3} \\ C = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \Delta ABC \text{ đều.}$$

- **Chú ý :** Ta giải cách khác : Đặt : $BH = x \geq 0$, $CH = y \geq 0$ $\quad (x + y \geq a)$

Ta có : $b + c = \sqrt{x^2 + h_a^2} + \sqrt{y^2 + h_b^2}$

Theo BĐT B.C.S :

$$(\sqrt{3}h_a + x)^2 \leq 4(h_a^2 + x^2). \quad \text{Dấu "=" } \Leftrightarrow h_a = x\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3}h_a + y)^2 \leq 4(h_a^2 + y^2). \quad \text{Dấu "=" } \Leftrightarrow h_a = y\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad b + c \geq \frac{1}{2}(\sqrt{3}h_a + x) + \frac{1}{2}(\sqrt{3}h_a + y) \geq \sqrt{3}h_a + \frac{1}{2}(x + y) \geq \sqrt{3}h_a + \frac{9}{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow h_a = \sqrt{3}x = \sqrt{3}y \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

BÀI 145.

- *Cách 1 :* Theo định lí hàm sin :

$$2(a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C) = a + b + c$$

$$\Leftrightarrow \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \sin A + \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow 4\sin A.\sin B.\sin C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = 1 \Leftrightarrow 4\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{A}{2} - 4\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2} + \cos^2\frac{B-C}{2} + \sin^2\frac{B-C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{B-C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{B-C}{2} \\ \sin\dfrac{B-C}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2} \\ B = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 60^\circ \\ B = C \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

- *Cách 2 :* Theo công thức hình chiếu : $\begin{cases} a = b.\cos C + c.\cos B \\ b = c.\cos A + a.\cos C \\ c = a.\cos B + b.\cos C \end{cases}$

Nên : $2(a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C) = a + b + c$

$\Leftrightarrow (a.\cos A + b.\cos B - a.\cos B - b.\cos A) +$

$+ (c.\cos C + a.\cos A - c.\cos A - a.\cos C) = 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(\cos A - \cos B) + (b - c)(\cos B - \cos C) + (c - a)(\cos C - \cos A) = 0$

Ta nhận thấy 3 biểu thức của vế trái đều nhỏ hơn hay bằng không (bạn đọc tự kiểm tra điều này).

Vì vậy : $\begin{cases} (a - b)(\cos A - \cos B) = 0 \\ (b - c)(\cos B - \cos C) = 0 \\ (c - a)(\cos C - \cos A) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

- *Cách 3 :* Theo định lí hàm cos :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \\ &= (b.\cos B + c.\cos C)^2 + (b.\sin B + c.\sin C)^2 \\ &\geq (b.\cos B + c.\cos C)^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad a \geq |b.\cos B + c.\cos C| = c.\cos B + c.\cos C$ (Bạn đọc tự kiểm tra)

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $b.\sin B = c.\sin C \Leftrightarrow b = c$.

Chứng minh tương tự :

$b \geq c.\cos C + a.\cos A$. Dấu "=" $\Leftrightarrow c = a$

$c \geq a.\cos A + b.\cos B$. Dấu "=" $\Leftrightarrow a = b$

Vậy : $a + b + c \geq 2(a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C)$

Dấu "=" $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow$ (đpcm).

- *Cách 4 :* Theo định lí hàm sin :

$$\begin{aligned} b.\cos B + c.\cos C &= 2R\sin B.\cos B + 2R\sin C.\cos C \\ &= 2R(\sin 2B + \sin 2C) \\ &= 2R\sin(B + C).\cos(B - C) \\ &= 2R\sin A(\cos(B - C) \\ &\leq 2R\sin A = a \end{aligned}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \cos(B - C) = 1 \Leftrightarrow B = C$

Vậy : $a \geq b.\cos B + c.\cos C$. Dấu "=" $\Leftrightarrow B = C$

(Sau đó tiếp tục như cách 3).

- *Cách 5 :* Theo định lí hàm cos :

$$b.\cos B + c.\cos C = b.\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - c.\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{b^2(c^2 + a^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{2abc}$$

$$= \frac{(b - c)^2[a^2 - (b + c)^2] + 2a^2bc}{2abc}$$

$$\leq \frac{2a^2bc}{2abc} = a$$

$\Rightarrow \quad b.\cos B + c.\cos C \leq a$

(vì $a < b + c \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < (b + c)^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - (b + c)^2 < 0$)

Dấu "=" $\Leftrightarrow b = c$ (tiếp tục như cách 3).

BÀI 146. Giả thiết $\Leftrightarrow \dfrac{1 - \cos A}{\sin A} + \dfrac{1 - \cos B}{\sin B} + \dfrac{1 - \cos C}{\sin C} = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}} + \frac{2\sin^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}} + \frac{2\sin^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} + 2\left(\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}\right)$$

$$= 3\left(\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} = \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\tan\frac{B}{2} - \tan\frac{C}{2}\right)^2 + \left(\tan\frac{C}{2} - \tan\frac{A}{2}\right)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow \tan\dfrac{A}{2} = \tan\dfrac{B}{2} = \tan\dfrac{C}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A = B = C \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ đều.

BÀI 147. Đặt : $\begin{cases} 2x = b + c > 0 \\ 2y = c + a > 0 \\ 2z = a + b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = y + z - x \\ b = z + x - y \\ c = x + y - z \end{cases}$

Lúc đó : $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} = \dfrac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y+z-x}{2x} + \frac{z+x-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(y-z)^2}{yz} + \frac{(z-x)^2}{zx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = y = z \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 2y = 2z$$

$\Leftrightarrow \quad a = b = c \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ đều.

■ **Chú ý :** $2(a+b+c)\left(\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} + \dfrac{1}{a+b}\right)$

$$= [(a+b) + (b+c) + (c+a)]\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right)$$

$$\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.3\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}} = 9$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow b + c = c + a = a + b \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow$ (đpcm).

(BĐT cuối này có tên là BĐT Nesbit).

BÀI 148. Giả thiết : $3S = 2R^2(\sin^3 A + \sin^3 A + \sin^3 C)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3abc}{4R} = 2R^2(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3abc = (2R\sin A)^3 + (2R\sin B)^3 + (2R\sin C)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad 3abc = a^3 + b^3 + c^3$$

$$\Leftrightarrow \quad 3abc = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3$$

$\Leftrightarrow \quad 3ab(a + b + c) = (a + b)^3 + c^3$

$\Leftrightarrow \quad 3ab(a + b + c) = (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2]$

$\Leftrightarrow \quad 3ab = (a + b)^2 - (a + b)c + c^2$

$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

$\Leftrightarrow \quad (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad a = b = c \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ đều.

■ **Chú ý :**

1. Nếu dùng trực tiếp BĐT Cauchy : $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^3} = 3abc$

Dấu "=" $\Leftrightarrow a^3 = b^3 = c^3 \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Vậy : $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ đều $\quad \Rightarrow \quad$ (đpcm).

2. Bạn đọc cũng có thể dùng trực tiếp hằng đẳng thức :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$

B. NHẬN DẠNG TAM GIÁC CÂN VÀ TAM GIÁC VUÔNG

BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

BÀI 149. Cho ΔABC thỏa : $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$.

Chứng minh ΔABC vuông.

■ ***Hướng dẫn :*** Xem lại kết quả bài 8.

BÀI 150. Cho ΔABC thỏa : $\dfrac{b}{\cos B} + \dfrac{c}{\cos C} = \dfrac{a}{\sin B.\sin C}$.

Chứng minh ΔABC vuông.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin.

BÀI 151. Cho ΔABC thỏa : $\sin\dfrac{A}{2}.\cos^3\dfrac{B}{2} = \sin\dfrac{B}{2}.\cos^3\dfrac{A}{2}$.

Chứng minh ΔABC cân.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng tính chất đơn điệu tăng của hàm $f(x) = x(1 + x^2)$ trên $\mathbb{R}$.

BÀI 152. Cho ΔABC thỏa $\dfrac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A$. Chứng minh ΔABC cân.

■ ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

$$2\sin B.\cos A = \sin(B + A) + \sin(B - A) = \sin C + \sin(B - A)$$

BÀI 153. Cho ΔABC thỏa : $a.\cos B - b.\cos A = a.\sin A - b.\sin B$.

Chứng minh ΔABC vuông hoặc cân.

- ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin.

BÀI 154. Cho ΔABC thỏa : $\cos B + \cos C = \dfrac{b+c}{a}$. Chứng minh ΔABC vuông.

- ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin hoặc định lí hàm cos.

BÀI 155. Cho ΔABC có $S = \dfrac{1}{4}(a^2 + b^2)$. Chứng minh ΔABC vuông cân tại C.

- ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức diện tích : $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

BÀI 156. Cho ΔABC có $h_a = \sqrt{bc}.\cos\dfrac{A}{2}$ (1) thì ΔABC cân.

- ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức : $h_a = c.\sin B = b.\sin C$

BÀI 157. Cho ΔABC có : $a.\sin(B - C) + b.\sin(C - A) = 0$.

Chứng minh ΔABC cân.

- ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin.

BÀI 158. Cho ΔABC có : $(p - b)\cot\dfrac{C}{2} = p\tan\dfrac{B}{2}$. Chứng minh ΔABC cân.

- ***Hướng dẫn :***
  - *Cách 1 :* Dùng định lí hàm sin.
  - *Cách 2 :* Dùng các công thức :

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}\;;\quad \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

(Các công thức này suy ra được từ định lí hàm cos).

BÀI 159. Cho ΔABC thỏa : $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A.\sin B$.

Chứng minh ΔABC vuông tại C.

- ***Hướng dẫn :*** Biến đổi đẳng thức đã cho :

$$\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A.\sin B$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A(\cos A - \sin B) + \sin B(\cos B - \sin A) = 0$$

. . . .

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)\left[\sin^2\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + \cos^2\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}\right] = 0$$

BÀI 160. Cho ΔABC có : $r_a = r + r_b + r_c$. Chứng minh rằng ΔABC vuông tại A.

- ■ ***Hướng dẫn :***

- *Cách 1 :* Sử dụng các công thức :

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

$$r_a = 4R\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

$$r_b = 4R\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

$$r_c = 4R\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

- *Cách 2 :* Sử dụng các công thức về diện tích của ΔABC :

$$S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

BÀI 161. Cho ΔABC có : $(a^2 - b^2)\sin(A+B) = (a^2 + b^2)\sin(A-B)$.

Chứng minh ΔABC vuông hoặc cân tại C.

- ■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin.

BÀI 162. Cho ΔABC có $\dfrac{\tan B}{\tan C} = \dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$ thì ΔABC vuông hoặc cân tại A.

- ■ ***Hướng dẫn :*** Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng : $\sin 2B = \sin 2C$

BÀI 163. Cho ΔABC có : $\dfrac{2(\cos^2 A + \cos^2 B)}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \cot^2 A + \cot^2 B$.

Chứng minh ΔABC cân tại C.

- ■ ***Hướng dẫn :*** Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng :

$$\frac{2\left(2 - \sin^2 A - \sin^2 B\right)}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} + \frac{\sin^2 B}{\sin^2 A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\sin A}{\sin B} - \frac{\sin B}{\sin A}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC \text{ cân tại } C.$$

BÀI 164. Cho ΔABC có : $\dfrac{1 + \cos B}{\sin B} = \dfrac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$ thì ΔABC cân.

- ■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin.

BÀI 165. Cho ΔABC thỏa : $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$.

Chứng minh ΔABC vuông.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng các công thức :

- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
- $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$

BÀI 166. Cho ΔABC có : $h_a = 2p\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$.

Chứng minh ΔABC vuông tại A.

■ ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

- $h_a = c.\sin B = 2R.\sin B.\sin C$
- $p = R(\sin A + \sin B + \sin C) = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

BÀI 167. Cho ΔABC có : $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{b-c}{b+c}}$. Chứng minh ΔABC vuông.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin.

LỜI GIẢI

BÀI 149. Ta có : $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2B) + \sin^2 C - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos(A + B).\cos(A - B) - \cos^2 C = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C.\cos(A - B) - \cos A = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C[\cos(A - B) - \cos C] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos A.\cos B.\cos C = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos A = 0 \\ \cos B = 0 \\ \cos C = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = \frac{\pi}{2} \\ B = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC \text{ vuông.}$$

BÀI 150.

- *Cách 1 :* Giả thiết $\Leftrightarrow \dfrac{\sin B}{\cos B} + \dfrac{\sin C}{\cos C} = \dfrac{\sin A}{\sin B.\sin C}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin B.\cos C + \sin C.\cos B}{\cos B.\cos C} = \dfrac{\sin A}{\sin B.\sin C}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin(B + C)}{\cos B.\cos C} = \dfrac{\sin A}{\sin B.\sin C} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\sin A}{\cos B.\cos C} = \dfrac{\sin A}{\sin B.\sin C}$

$\Leftrightarrow \quad \cos B.\cos C = \sin B.\sin C$ (vì $\sin A > 0$)

$\Leftrightarrow \quad \cos(B + C) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = \dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow$ ΔABC vuông tại A.

- *Cách 2 :* Giả thiết $\Leftrightarrow \dfrac{\sin B}{\cos B} + \dfrac{\sin C}{\cos C} = \dfrac{\sin A}{\sin B.\sin C}$

$\Leftrightarrow \quad \tan B + \tan C = \dfrac{\sin(B + C)}{\sin B.\sin C} = \cot B + \cot C$

$\Leftrightarrow \quad (\tan B - \cot B) + (\tan C - \cot C) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cot 2B + \cot 2C = 0$ (vì : $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$)

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\sin(2B + 2C)}{\sin 2B.\sin 2C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2\pi - 2A) = 0$

$\Rightarrow \quad \sin 2A = 0$ (vì $0 < 2A < 2\pi$)

$\Rightarrow \quad 2A = \pi \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$ ΔABC vuông tại A.

BÀI 151. Ta có : $\sin\dfrac{A}{2}.\cos^3\dfrac{B}{2} = \sin\dfrac{B}{2}.\cos^3\dfrac{A}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\sin\dfrac{A}{2}}{\cos^3\dfrac{A}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{B}{2}}{\cos^3\dfrac{B}{2}}$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\left(1 + \tan^2\frac{A}{2}\right) = \tan\frac{B}{2}\left(1 + \tan^2\frac{B}{2}\right) \qquad (1)$$

- *Cách 1 :* (1) $\Leftrightarrow \left(\tan\dfrac{A}{2} - \tan\dfrac{B}{2}\right) + \tan^3\dfrac{A}{2} - \tan^3\dfrac{B}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{B}{2}\right)\left(1 + \tan^2\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan^2\frac{B}{2}\right) = 0$$

Vì : $0 < \dfrac{A}{2}, \dfrac{B}{2} < \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan\dfrac{A}{2}, \tan\dfrac{B}{2} > 0$

Nên : $\tan\dfrac{A}{2} - \tan\dfrac{B}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = B \quad \Leftrightarrow$ ΔABC cân tại C.

- *Cách 2 :* Xét : $f(x) = x(1 + x^2),\ x > 0$

$$f'(x) = 1 + 3x^2 > 0,\ \forall x > 0 \Rightarrow \text{f là hàm tăng trên } (0; +\infty).$$

Vì vậy : $(1) \Leftrightarrow \quad f\left(\tan\frac{A}{2}\right) = f\left(\tan\frac{B}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \tan\frac{B}{2} = \tan\frac{B}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad A = B \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC \text{ cân tại C.}$$

BÀI 152. $\dfrac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A \quad \Leftrightarrow \quad \sin C = 2\sin B.\cos A$

$\Leftrightarrow \quad \sin C = \sin(B + A) + \sin(B - A)$

$\Leftrightarrow \quad \sin C = \sin C + \sin(B - A)$

$\Leftrightarrow \quad \sin(B - A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B - A = 0 \quad (\text{vì } |B - A| < \pi)$

$\Leftrightarrow \quad A = B \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ cân tại C.

BÀI 153. Theo định lí hàm sin : $a\cos B - b\cos A = a\sin A - b\sin B$

$\Leftrightarrow \quad \sin A.\cos B - \sin B.\cos A = \sin^2 A - \sin^2 B$

$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2A) - \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2B)$

$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B) = \dfrac{1}{2}(\cos 2B - \cos 2A)$

$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B) = \sin(A - B).\sin(A + B)$

$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B)(\sin C - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin(A - B) = 0 \\ \sin C = 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} A - B = 0 & \quad (\text{vì } |A - B| < \pi) \\ C = \dfrac{\pi}{2} & \quad (\text{vì } 0 < C < \pi) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ cân hoặc vuông tại C.

BÀI 154.

- *Cách 1 :* $\cos B + \cos C = \dfrac{b + c}{a}$

$\Leftrightarrow \quad \sin A(\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$

$\Leftrightarrow \quad \sin A.\ 2\cos\dfrac{B + C}{2}.\cos\dfrac{B - C}{2} = 2\sin\dfrac{B + C}{2}.\cos\dfrac{B - C}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \sin A.\sin\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B - C}{2} = \cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B - C}{2}$

$$\text{Vì : } \begin{cases} 0 < \dfrac{A}{2} < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \left|\dfrac{B - C}{2}\right| < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{A}{2} > 0 \\ \cos\dfrac{B - C}{2} > 0 \end{cases}$$

Nên : $2\sin^2\frac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow A = 90^0$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

- *Cách 2 :* $\cos B + \cos C = \frac{b+c}{a} \Leftrightarrow \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{b+c}{a}$

$\Leftrightarrow b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2bc(b + c)$

$\Leftrightarrow (bc^2 + b^2c) + (a^2b + ca^2) - (b^3 + c^3) - 2bc(b + c) = 0$

$\Leftrightarrow (b + c)[a^2 - (b^2 + c^2 - bc) - bc] = 0$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

BÀI 155.

Ta có : $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$

$\Leftrightarrow 2ab.\sin C = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2ab) + 2ab - 2ab\sin C = 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + 2ab(1 - \sin C) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ 1 - \sin C = 0 \quad (\text{vì } 0 < \sin C \le 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ C = 90^0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại C.

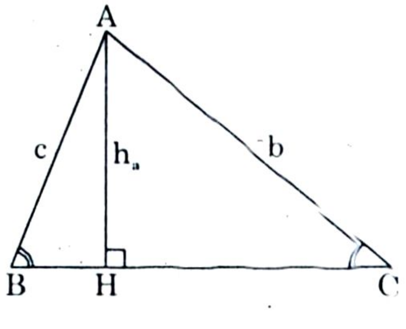
■ **Chú ý :** Ta có : $S = \frac{1}{2}ab\sin C \le \frac{1}{2}ab \le \frac{1}{2}.\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$

$\Rightarrow S \le \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$.

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin C = 1 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại C.

Vậy : $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại C.

BÀI 156. Ta có : $h_a = c.\sin B = b.\sin C$



$\Rightarrow h_a^2 = bc.\sin B.\sin C$

Nên (1) $\Leftrightarrow h_a^2 = bc\cos^2\frac{A}{2}$

$\Leftrightarrow bc.\sin B.\sin C = bc.\cos^2\frac{A}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[\cos(B - C) - \cos(B + C)] = \frac{1}{2}(1 + \cos A)$

$\Leftrightarrow \cos(B - C) + \cos A = 1 + \cos A$

$\Leftrightarrow \quad \cos(B - C) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad B - C = 0 \quad (\text{vì } |B - C| < \pi)$

$\Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ cân tại A.

- **Chú ý :** Cách giải khác, dùng BĐT Cauchy :

Ta có : $$l_a = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b + c} \le \frac{2bc.\cos\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{bc}} = \sqrt{bc}.\cos\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad h_a \le l_a \le \sqrt{bc}.\cos\frac{A}{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow b = c \Rightarrow$ (đpcm).

BÀI 157. Ta có : $a.\sin(B - C) + b.\sin(C - A) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin A.\sin(B - C) + \sin B.\sin(C - A) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin(B + C).\sin(B - C) + \sin(C + A).\sin(C - A) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\cos 2C - \cos 2B) + \frac{1}{2}(\cos 2A - \cos 2C) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos 2A = \cos 2B \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - \cos 2A}{2} = \frac{1 - \cos 2B}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = \sin^2 B \quad \Leftrightarrow \quad \sin A = \sin B$

$\Leftrightarrow \quad A = B \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ cân tại C.

BÀI 158.

- *Cách 1 :* Giả thiết $\Leftrightarrow (c + a - b)\cot\frac{C}{2} = (a + b + c)\tan\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow (\sin C + \sin A - \sin B)\cot\frac{C}{2} = (\sin A + \sin B + \sin C)\tan\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{C + A}{2}.\cos\frac{C - A}{2} - \sin B\right)\cot\frac{C}{2} = \left(2\sin\frac{A + B}{2}.\cos\frac{A - B}{2} + \sin C\right)\tan\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \left(2\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C - A}{2} - 2\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{B}{2}\right)\cot\frac{C}{2} =$

$= \left(2\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A - B}{2} + 2\cos\frac{C}{2}.\sin\frac{C}{2}\right)\tan\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2}\left(\cos\frac{C - A}{2} - \cos\frac{C + A}{2}\right)\cot\frac{C}{2} = \cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A - B}{2} + \cos\frac{A + B}{2}\right)\tan\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2}.2\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}.\cot\frac{C}{2} = \cos\frac{C}{2}.2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\tan\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.\cot\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.\tan\frac{B}{2}$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{C}{2}.\cot\frac{C}{2} = \tan\frac{B}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\frac{A}{2} = \tan\frac{B}{2} \quad \Leftrightarrow A = B$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

- *Cách 2 :* Ta đã biết : $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$; $\quad \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$

Nên : $(p-b)\cot\frac{C}{2} = p\tan\frac{B}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad (p-b)\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}} = p\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p-b}{\sqrt{p-a}} = \sqrt{p-a}$$

$\Leftrightarrow \quad p-b = p-a \quad \Leftrightarrow \quad a = b \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ cân tại C.

BÀI 159.

$$\sin2A + \sin2B = 4\sin A.\sin B \quad \Leftrightarrow \quad \sin A.\cos A + \sin B.\cos B = 2\sin A.\sin B$$

$$\Leftrightarrow (\sin A.\cos A - \sin A.\sin B) + (\sin B.\cos B - \sin A.\sin B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin A(\cos A - \sin B) + \sin B(\cos B - \sin A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin A\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - \sin B\right] + \sin B\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) - \sin A\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin A.2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A-B}{2}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right) +$$

$$+ \sin B.2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)\left[\sin A.\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right) + \sin B.\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A-B}{2}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)\left[\sin A\left(\sin\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + \sin B\left(-\sin\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)\left[\sin\frac{A-B}{2}(\sin A - \sin B) + \cos\frac{A-B}{2}(\sin A + \sin B)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)\left[\sin\frac{A-B}{2}.2\cos\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A-B}{2} +\right.$$

$$\left. + \cos\frac{A-B}{2}.2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)\left(\sin^2\frac{A-B}{2}.\sin\frac{C}{2} + \cos^2\frac{A-B}{2}.\cos\frac{C}{2}\right) = 0$$

Vì : $\begin{cases} 0 < \dfrac{C}{2} < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\dfrac{C}{2}, \cos\dfrac{C}{2} > 0 \\ \left|\dfrac{A-B}{2}\right| < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^2\dfrac{A-B}{2} \geq 0, \cos^2\dfrac{A-B}{2} > 0 \end{cases}$

Nên : $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{A+B}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{A+B}{2} = 0$

$$\left(\text{vì } 0 < \frac{A+B}{2} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2} < \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow A + B = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2} \quad (\text{vì } A + B + C = \pi)$$

Vậy ΔABC vuông tại C.

BÀI 160.

- *Cách 1 :*

Ta có : $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$ (xem bài 30)

$$r_a = p\tan\frac{A}{2} = R(\sin A + \sin B + \sin C)\tan\frac{A}{2}$$

$$= 4R\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} \quad (\text{xem bài 4})$$

Chứng minh tương tự :

$$r_b = 4R\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}; \qquad r_c = 4R\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

Do đó : $r_a = r + r_b + r_c$

$$\Leftrightarrow 4R\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} + 4R\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} +$$
$$+ 4R\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B+C}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\frac{A}{2} = \cos^2\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \cos A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{\pi}{2}$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

- *Cách 2 :*

Ta có : $\begin{cases} r = \dfrac{S}{p} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \\ r_a = \dfrac{S}{p-a} = \sqrt{\dfrac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} \\ r_b = \dfrac{S}{p-b} = \sqrt{\dfrac{p(p-c)(p-a)}{p-b}} \\ r_c = \dfrac{S}{p-c} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)(p-b)}{p-c}} \end{cases}$

Lúc đó : $r_a = r + r_b + r_c$

$\Leftrightarrow p(p-b)(p-c) = (p-a)(p-b)(p-c) + p(p-a)(p-b) + p(p-c)(p-a)$

$\Leftrightarrow (p-b)(p-c)(p-p+a) = p(p-a)(p-b+p-c)$

$\Leftrightarrow (p-b)(p-c)a = ap(p-a) \Leftrightarrow (p-b)(p-c) = p(p-a)$

$\Leftrightarrow a^2 - (b-c)^2 = (b+c)^2 - a^2 \Leftrightarrow 2a^2 = (b+c)^2 + (b-c)^2$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

BÀI 161. Ta có : $(a^2 - b^2)\sin(A+B) = (a^2 + b^2).\sin(A-B)$

$\Leftrightarrow a^2[\sin(A+B) - \sin(A-B)] = b^2[\sin(A-B) + \sin(A-B)]$

$\Leftrightarrow a^2.2\cos A.\sin B = b^2.2\sin A.\cos B$

$\Leftrightarrow \sin^2 A.\cos A.\sin B = \sin^2 B.\sin A.\cos B$

$\Leftrightarrow \sin A.\cos A = \sin B = \cos B$ (vì $\sin A, \sin B > 0$)

$\Leftrightarrow \sin 2A - \sin 2B = 0 \Leftrightarrow \sin(A-B).\cos(A+B) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(A-B) = 0 \\ \cos C = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ C = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$ (vì $0 < C < \pi$, $-\pi < A - B < \pi$)

Vậy : ΔABC vuông hoặc cân tại C.

BÀI 162. Ta có : $\dfrac{\tan B}{\tan C} = \dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 C} \Rightarrow \tan B.\sin^2 C = \sin^2 B.\tan C$

$\Rightarrow \sin B.\sin^2 C.\cos C = \sin^2 B.\sin C.\cos B$

$\Leftrightarrow \sin C.\cos C = \sin B.\cos B$ (vì $\sin B, \sin C > 0$)

$\Leftrightarrow \sin 2C = \sin 2B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{\pi}{2} \\ B = C \end{array}\right.$ (tương tự bài 161)

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông hoặc cân tại A.

BÀI 163. Gỉa thiết $\Leftrightarrow \quad \dfrac{2(\cos^2 A + \cos^2 B)}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \dfrac{1}{\sin^2 A} + \dfrac{1}{\sin^2 B} - 2$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2(2 - \sin^2 A - \sin^2 B)}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{\sin^2 A + \sin^2 B} - 2 = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 = (\sin^2 A + \sin^2 B)\left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B}\right) \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 = 2 + \left(\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} + \frac{\sin^2 B}{\sin^2 A}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\sin A}{\sin B} - \frac{\sin B}{\sin A}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

$\Leftrightarrow \quad \sin A = \sin B \quad \Leftrightarrow \quad A = B \quad \Leftrightarrow$ ΔABC cân tại C.

■ **Chú ý :** Ta có thể dùng BĐT Cauchy trực tiếp :

$$\left.\begin{aligned} &\sin^2 A + \sin^2 B \geq 2\sin A.\sin B > 0 \\ &\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} \geq \frac{2}{\sin A.\sin B} > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\sin^2 A + \sin^2 B)\left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B}\right) \geq 4$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \sin A = \sin B \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow$ ΔABC cân tại C $\Leftrightarrow$ (đpcm).

BÀI 164.

- *Cách 1 :* Theo định lí hàm sin :

$$\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(1 + \cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a + c)^2}{4a^2 - c^2} = \frac{3a + c}{2a - c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1 + \cos B)^2}{1 - \cos^2 B} = \frac{2a + c}{2a - c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2\sin A + \sin C}{2\sin A - \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin A - \sin C + 2\sin A.\cos B - \sin C.\cos B =$$
$$= 2\sin A + \sin C - 2\sin A.\cos B - \sin C.\cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin A.\cos B = 2\sin C \quad \Leftrightarrow \quad 2[\sin(A + B) + \sin(A - B)] = 2\sin C$$

$$\Leftrightarrow \quad 2[\sin C + \sin(A - B)] = 2\sin C \quad \Leftrightarrow \quad \sin(A - B) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad A = B$ (vì $|A - B| < \pi$) $\quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ cân tại C.

- *Cách 2 :* Giả thiết $\Leftrightarrow \quad \dfrac{2\cos^2 \dfrac{B}{2}}{2\sin\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{B}{2}} = \sqrt{\dfrac{(2a + c)^2}{(2a - c)(2a + c)}}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\tan\frac{B}{2}} = \sqrt{\frac{2a+c}{2a-c}} \quad \Leftrightarrow \quad \tan^2\frac{B}{2} = \frac{2a-c}{2a+c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)} = \frac{2a-c}{2a+c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b^2-(c-a)^2}{(c+a)^2-b^2} = \frac{2a-c}{2a+c} \qquad \Leftrightarrow \quad \frac{b^2-(c-a)^2}{(c+a)^2-b^2} + 1 = \frac{2a-c}{2a+c} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4ac}{(c+a)^2-b^2} = \frac{4a}{2a+c} \qquad \Leftrightarrow c(2a+c) = (c+a)^2 - b^2$$

$$\Leftrightarrow 2ac + c^2 = c^2 + a^2 + 2ca - b^2$$

$\Leftrightarrow \quad b^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = b \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ cân tại C.

BÀI 165. Ta có : $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos(A+B).\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1 = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\cos C.\cos(A-B) + 2\cos^2 C = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C[-\cos(A-B) + \cos C] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C[\cos(A+B) + \cos(A+B)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C.2\cos A.\cos B = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos A = 0 \\ \cos B = 0 \\ \cos C = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = \frac{\pi}{2} \\ B = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC \text{ vuông.}$$

- **Chú ý :**

1. Bạn đọc xem lại bài 7.
2. Ta có : $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$

   $\Leftrightarrow \quad \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$ ...

BÀI 166.

- *Cách 1 :* Ta có : $h_a = c.\sin B = 2R\sin B.\sin C$

$$p = R(\sin A + \sin B + \sin C) = 4R\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

(Bạn đọc xem lại bài 4)

Nên : $h_a = 2p\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 8R\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} = 8R\sqrt{2}\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

$\Leftrightarrow \quad \cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{A}{2} = \dfrac{\pi}{4} \quad (\text{vì } 0 < \dfrac{A}{2} < \dfrac{\pi}{2})$

Vậy : $A = \dfrac{\pi}{2}$, tức là ΔABC vuông tại A.

- *Cách 2 :* Giả thiết $\Leftrightarrow \quad h_a = 2p\sqrt{2}\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} = 2p\sqrt{2}\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{c.a}}.\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$\Leftrightarrow \quad bc = \sqrt{2}\sqrt{p(p-a)} \quad \Leftrightarrow \quad bc = \frac{1}{2}[(b+c)^2 - a^2]$$

$$\Leftrightarrow \quad 2bc = (b+c)^2 - a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2$$

$\Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ vuông tại A $\quad \Rightarrow \quad$ (đpcm).

BÀI 167.

- *Cách 1 :* Giả thiết $\Leftrightarrow \quad \tan^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{b-c}{b+c}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1-\cos A}{1+\cos A} = \dfrac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}$ (Định lí hàm sin)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-\cos A}{1+\cos A} + 1 = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{1+\cos A} = \frac{2\sin B}{\sin B + \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin B + \sin C = \sin B + \sin B.\cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A+B) = \sin B.\cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A.\cos B + \sin B.\cos A = \sin B.\cos A$$

$\Leftrightarrow \quad \sin A.\cos B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \dfrac{\pi}{2}$ (vì $\sin A > 0$)

$\Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ vuông tại B.

- *Cách 2 :* Ta có : $\tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{b-c}{b+c}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\dfrac{b-c}{b+c}}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2} = \frac{b-c}{b+c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2} + 1 = \frac{b-c}{b+c} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4bc}{(b+c)^2-a^2} = \frac{2b}{b+c} \quad \Leftrightarrow \quad 2c(b+c) = (b+c)^2 - a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2bc + 2c^2 = b^2 + c^2 + 2bc - a^2$$

$\Leftrightarrow \quad a^2 + c^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ vuông tại B $\quad \Rightarrow \quad$ (đpcm).

C. NHẬN DẠNG MỘT SỐ TAM GIÁC KHÁC

BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

BÀI 168. Cho ΔABC thỏa : $\sin(B+C)+\sin(C+A)+\cos(A+B)=\dfrac{3}{2}$.

Nhận dạng tam giác.

- ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng : $\begin{cases} \sin A+\sin B=2\cos\dfrac{C}{2}.\cos\dfrac{A-B}{2} \\ \cos C=2\cos^2\dfrac{C}{2}-1 \end{cases}$

BÀI 169. Cho ΔABC thỏa : $2\cos A.\sin B.\sin C+\sqrt{3}(\sin A+\cos B+\cos C)=\dfrac{17}{4}$.

Nhận dạng tam giác.

- ***Hướng dẫn :*** Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng :

$$\left(\cos B-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\cos C-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$$

BÀI 170. Cho ΔABC thỏa : $\sin^2A+\sin^2B+2\sin A.\sin B=\dfrac{9}{4}+3.\cos C+\cos^2C$.

- ***Hướng dẫn :*** Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng :

$$\sin A+\sin B=\cos C+\frac{3}{2}$$

BÀI 171. Nhận dạng ΔABC, biết : $\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=0$.

- ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

$$\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=4\cos\frac{5A}{2}.\cos\frac{5B}{2}.\cos\frac{5C}{2}$$

BÀI 172. Nhận dạng ΔABC, biết : $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0$ (1)

- ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\frac{3A}{2}.\cos\frac{3B}{2}.\cos\frac{3C}{2}$$

BÀI 173. Nhận dạng ΔABC, biết : $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\sqrt{3}$ (1)

- ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng : $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

BÀI 174. Cho ΔABC thỏa : $b(a^2-b^2)=c(c^2-a^2)$. Nhận dạng tam giác này.

- ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos.

BÀI 175. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = \frac{3}{2}$.

- ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :
  - $\cos 2A + \cos 2B = -2\cos C.\cos(A - B)$
  - $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1$

LỜI GIẢI

BÀI 168. Giả thiết $\Leftrightarrow$ $\sin A + \sin B - \cos C = \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} - \cos C = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \left(2\cos^2\frac{C}{2} - 1\right) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2\frac{C}{2} - 2\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + \frac{1}{2} = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2\frac{C}{2} - \cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2} + \frac{1}{4}\sin^2\frac{A-B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{A-B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2} \\ \sin\frac{A-B}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = B = 30^0 \\ C = 120^0 \end{cases}$$

- **Chú ý :** Ta có thể dùng tính chất tam thức bậc 2 để nhận dạng tam giác này.

Quả vậy : Đặt : $t = \cos\frac{C}{2} \in (0; 1)$

$(1) \Leftrightarrow f(t) = 2t^2 - 2\cos\frac{A-B}{2}.t + \frac{1}{2} = 0$ (có nghiệm)

$$\Delta' = \cos^2\frac{A-B}{2} - 1 = -\sin^2\frac{A-B}{2} \le 0$$

Nên : $\Delta' = 0 \Leftrightarrow A = B$

Lúc đó : $t = -\frac{b'}{a} = \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = 120^0$

Vậy : $\begin{cases} A = B \\ C = 120^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = 30^0 \\ C = 120^0. \end{cases}$

BÀI 169. Giả thiết $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos A[\cos(B - C) - \cos(B + C)] + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\cos(B + C)\cos(B - C) + \cos^2 A + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C) + \cos^2 A + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(2\cos^2 B - 1 + 2\cos^2 C - 1) + \cos^2 A + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 1 + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2 B - \sqrt{3}\cos B + \frac{3}{4}\right) + \left(\cos^2 C - \sqrt{3}\cos C + \frac{3}{4}\right) +$$

$$+\left(\sin^2 A - \sqrt{3}\sin A + \frac{3}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin A = \cos B = \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 120^\circ \\ B = C = 30^\circ. \end{cases}$$

BÀI 170. Bài toán $\Leftrightarrow \quad \sin^2 A + 2\sin A.\sin B + \sin^2 B = \cos^2 C + 2\cos C.\frac{3}{2} + \frac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin A + \sin B)^2 = \left(\cos C + \frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A + \sin B = \cos C + \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = B = 30^\circ \\ C = 120^\circ \end{cases}$$

(Bạn đọc tự kiểm tra, xem như bài tập).

BÀI 171. Giả thiết $\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{5}{2}(A + B).\cos\frac{5}{2}(A - B) + \sin 5C = 0.$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{5}{2}(A - B) + 2\sin\frac{5C}{2}.\cos\frac{5C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{5C}{2}\left[\cos\frac{5}{2}(A - B) + \cos\frac{5}{2}(A + B)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos\frac{5C}{2}.\cos\frac{5A}{2}.\cos\frac{5B}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos\frac{5A}{2} = 0 & (1) \\ \cos\frac{5B}{2} = 0 & (2) \\ \cos\frac{5C}{2} = 0 & (3) \end{array}\right.$$

- *Giải (1) :* $\cos\frac{5A}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5A}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$

Do : $0 < A < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} < \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{5} < \frac{2k\pi}{5} < \frac{4\pi}{5}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 1 \end{array}\right.$$

Vậy : $\left[\begin{array}{l} A = \frac{\pi}{5} \\ A = \frac{3\pi}{5} \end{array}\right.$

Tương tự giải (2), (3).

- *Tóm lại :* ΔABC thỏa giả thiết trên thì có một góc $\frac{\pi}{5}$ (tức là 36°) hay $\frac{3\pi}{5}$ (tức là 108°).

■ **Chú ý :** Bạn đọc xem lại bài 4, ta có ngay :

$$\sin5A + \sin5B + \sin5C = 4\cos\frac{5A}{2}.\cos\frac{5B}{2}.\cos\frac{5C}{2}.$$

BÀI 172. Theo bài 4 : $\sin3A + \sin3B + \sin3C = -4\cos\frac{3A}{2}.\cos\frac{3B}{2}.\cos\frac{3C}{2}$

Nên (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos\frac{3A}{2} = 0 & (2) \\ \cos\frac{3B}{2} = 0 & (3) \\ \cos\frac{3C}{2} = 0 & (4) \end{array}\right.$

- *Giải (2) :* $\cos\frac{3A}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3A}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3} + 2\frac{k\pi}{3}$

Mà : $0 < A < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < \frac{2k\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 1 \Leftrightarrow k = 0 \Rightarrow A = \frac{\pi}{3}$$

Tương tự : $(3) \Leftrightarrow B = \frac{\pi}{3}$; $(4) \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{3}$

Vậy ΔABC có ít nhất một góc $\frac{\pi}{3}$ (tức là góc 60^o).

BÀI 173.

$(1) \Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C = \sqrt{3}(\cos A + \cos B + \cos C)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right) + \left(\frac{1}{2}\sin B - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right) + \left(\frac{1}{2}\sin C - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(A - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(B - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \qquad (2)$$

Đặt : $\alpha = A - \frac{\pi}{3}$, $\beta = B - \frac{\pi}{3}$, $\gamma = C - \frac{\pi}{3}$ $\quad (\alpha + \beta + \gamma = 0)$

Nên (2) $\Leftrightarrow \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\gamma = 0$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{\gamma}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2}.\cos\frac{\gamma}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{\gamma}{2}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin\frac{\alpha}{2} = 0 & (3) \\ \sin\frac{\beta}{2} = 0 & (4) \\ \sin\frac{\gamma}{2} = 0 & (5) \end{array}\right.$$

- *Giải (3) :* $\sin\frac{\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = k\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi$

$$\Leftrightarrow A - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Mà : $0 < A < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{3} + 2k\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < 2k\pi < \frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{1}{3} \Leftrightarrow k = 0 \Rightarrow A = \frac{\pi}{3}$$

Tương tự : $(4) \Leftrightarrow B = \frac{\pi}{3}$; $(5) \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{3}$

Vậy ΔABC có ít nhất một góc $\frac{\pi}{3}$ (60^o).

BÀI 174.

- *Cách 1* : $b(a^2 - b^2) = c(c^2 - a^2) \Leftrightarrow ba^2 - b^3 = c^3 - ca^2$

$$\Leftrightarrow ba^2 + ca^2 = b^3 + c^3 \Leftrightarrow a^2(b + c) = (b + c)(b^2 - bc + c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 - bc + c^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = -bc$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60^\circ$$

Vậy ΔABC có góc A là 60°.

- *Cách 2* : Cũng từ : $b(a^2 - b^2) = c(c^2 - a^2)$

$$\Leftrightarrow b(b^2 + c^2 - 2bc.\cos A - b^2) = c[c^2 - (b^2 + c^2 - 2bc(\cos A)]$$

$$\Leftrightarrow b(c^2 - 2bc.\cos A) = c(2bc.\cos A - b^2)$$

$$\Leftrightarrow bc^2 + b^2c = 2\cos A.(bc^2 + b^2c) \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60^\circ$$

Vậy ΔABC có $A = 60^\circ$.

BÀI 175. $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\cos(A + B).\cos(A - B) - (2\cos^2 C - 1) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2\cos C.\cos(A - B) - 2\cos^2 C = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 C + 2\cos C.\cos(A - B) + \frac{1}{2} = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 C + \cos C.\cos(A - B) + \frac{1}{4}\cos(A - B) + \frac{1}{4}\sin^2(A - B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos C + \frac{1}{2}\cos(A - B)\right]^2 + \frac{1}{4}\sin^2(A - B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos C = -\frac{1}{2}\cos(A - B)\\ \sin(A - B) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos C = -\frac{1}{2}\\ A = B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}C = 120^\circ\\ A = B = 30^\circ\end{cases}$$

■ **Chú ý :** Giải tương tự bài 168, ta cũng có kết quả cần tìm.

Quả vậy : Đặt : $t = \cos C \in (-1; 1)$, ta có :

$$(1) \Leftrightarrow f(t) = 2t^2 + 2\cos(A - B)t + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{(có nghiệm)}$$

$$\Delta' = \cos^2(A - B) - 1 = -\sin^2(A - B) \le 0$$

Nên : $\Delta' = 0 \Leftrightarrow A = B$

Lúc đó : $t = -\frac{b'}{a} = -\frac{1}{2}\cos(A - B) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos C = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow C = 120^\circ$

Vậy : $\begin{cases} A = B \\ C = 120^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = 30^\circ \\ C = 120^\circ \end{cases}$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

176. Cho ΔABC thỏa $\begin{cases} \sin A + \sin B = 2\sin C \\ \cos A + \cos B = 2\cos C \end{cases}$.

Chứng minh ΔABC đều.

177*. Cho ΔABC nhọn, thỏa : $\tan^2 A + \tan^2 B = 2\tan^2\frac{A+B}{2}$.

Chứng minh ΔABC cân tại C.

178. Cho ΔABC có : $\sin(B - A).\sin C + \sin A + \cos B = \frac{3}{2}$.

Nhận dạng tam giác này.

179. Cho ΔABC thỏa : $\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2} = \frac{9}{4}$.

Chứng minh ΔABC đều.

180. Cho ΔABC thỏa : $\cot\frac{B}{2} = \frac{a+c}{2}$. Chứng minh ΔABC vuông.

181*. Cho ΔABC.

a) Chứng minh : $l_a = \dfrac{a\sin B.\sin C}{\sin A.\cos\frac{B-C}{2}}$.

b) Cho $l_a = l_b = l_c$. Chứng minh ΔABC đều.

c) Cho $\begin{cases} \sin B = (\sqrt{2} - \cos C)\sin A \\ \sin C = (\sqrt{2} - \cos B)\sin A \end{cases}$. Chứng minh ΔABC cân tại A.

182. Cho ΔABC thỏa : $\begin{cases} p.\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = p - c \\ p.\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} = p - b \end{cases}$

Chứng minh ΔABC đều.

183. Cho ΔABC thỏa : $\sin A = \cos B + \cos C$. Chứng minh ΔABC vuông.

184. Cho ΔABC có $S = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)$. Nhận dạng tam giác này.

185. Cho ΔABC thỏa : $\dfrac{\sin^2 A}{h_a^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

Nhận dạng tam giác này.

186. Nhận dạng ΔABC, biết :

$$S.\sin A.\sin B.\sin C = (\sin A + \sin B + \sin C)^2.$$

187. Nhận dạng tam giác ΔABC, biết :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = \frac{a+b+c}{2}.$$

188*. Cho ΔABC thỏa : $\sin^2 A.\sin^2 B.\sin^2 C = \dfrac{27}{64}$.

Chứng minh ΔABC đều.

189*. Cho ΔABC thỏa : $\sin\dfrac{C}{2} = \cos\sqrt{\dfrac{A^2 + B^2}{2}}$.

Chứng minh ΔABC cân.

190. Cho ΔABC thỏa : $\begin{cases} r + r_a = 4R.\cos C \\ r + r_b = 4R.\cos A \end{cases}$

Chứng minh ΔABC đều.

191*. Cho ΔABC thỏa : $\begin{cases} 2A + 3B = \pi \\ 4(a+b) = 5C \end{cases}$.

Nhận dạng tam giác trên.

192*. Cho ΔABC thỏa : $\begin{cases} 5\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C \\ \sin A = \dfrac{3}{5} \end{cases}$

Nhận dạng tam giác.

193*. Cho ΔABC thỏa : $\begin{cases} (a+b+c)^2 = 9bc \\ a \le b \le c \end{cases}$.

Nhận dạng tam giác này.

194. Cho ΔABC thỏa : $abc(\sin A + \cos A) = a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c)$.

Chứng minh ΔABC vuông.

195. ΔABC thỏa : $abc.\cos B = 2[(a+b).(p-a).(p-b)]$.

Nhận dạng tam giác này.

196. ΔABC thỏa : $\sin B + \sin C = \sin A.\cos B.\cos C\left(\dfrac{1}{\cos B} + \dfrac{1}{\cos C}\right)$.

Chứng minh ΔABC vuông.

197. Nhận dạng ΔABC, biết rằng tam giác thỏa một trong các điều kiện sau :

a) $\sin 9A + \sin 9B + \sin 9C = 0$ b) $\sin 10A + \sin 10B + \sin 10C = 0$.

198. Nhận dạng ΔABC, biết rằng tam giác thỏa một trong các điều kiện sau :

a) $\dfrac{2\cos A + \cos C}{2\cos B + \cos C} = \dfrac{\sin B}{\sin A}$ b) $\begin{cases} \sin(B - C) = |b^2 - c^2| \\ a = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \tan\dfrac{B - C}{2} = |b - c| \\ b + c = 1 \end{cases}$

199. Nhận dạng ΔABC, biết rằng tam giác thỏa một trong các điều kiện sau :

a) $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{l_a}$ b) $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{l_a}$

c) $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{\sqrt{2}}{l_a}$ d) $S = a^2 - (b - c)^2$.

Chương 3. BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC CẦN NHỚ

1. BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ $(2 \leq n \in \mathbb{Z})$ *thì :*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \; {}^{3} \; \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPSKI (B.C.S)

Nếu : $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$ $\quad (2 \leq n \in \mathbb{Z})$ *thì :*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $a_i = kb_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

3. BẤT ĐẲNG THỨC TREBƯSEP

- ***Dạng 1 :*** *Nếu :* $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \end{cases}$ $\quad (2 \leq n \in \mathbb{Z})$ *thì :*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} . \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = \ldots = a_n \\ b_1 = b_2 = \ldots = b_n \end{array}\right.$

- ***Dạng 2 :*** *Nếu :* $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \end{cases}$ *thì :*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} . \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \geq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = \ldots = a_n \\ b_1 = b_2 = \ldots = b_n \end{array}\right.$

4. BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

- ***Dạng nguyên thủy :***

Nếu $a \geq -1$, $1 \leq n \in \mathbb{Z}$ *thì :* $(1 + a)^n \geq 1 + na$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ n = 1 \end{array}\right.$

- ***Dạng mở rộng :***

+ $a > -1,\ \alpha \geq 1$ *thì :* $(1 + a)^{\alpha} \geq 1 + \alpha.a$

+ $a > -1,\ 0 < \alpha \leq 1$ *thì :* $(1 + a)^{\alpha} \leq 1 + \alpha.a$

Cả hai BĐT có dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ a = 0 \end{array}\right.$

5. BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

- ***Dạng (hàm lồi) :***

Hàm số : $f : (a; b) \to \mathbf{R}$ *thỏa* $f''(x) < 0,\ \forall x \in (a; b)$ *thì :*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$$

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a; b), \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$$

và $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1 \quad (2 \leq n \in \mathbb{Z})$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

- ***Dạng (hàm lõm) :***

Hàm số : $f : (a; b) \to \mathbf{R}$ *thỏa* $f''(x) > 0,\ \forall x \in (a; b)$ *thì :*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$$

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a; b), \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$$

và $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1 \quad (2 \leq n \in \mathbb{Z})$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

6. KIẾN THỨC TAM THỨC BẬC 2 (không đổi dấu trên R)

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

- $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- $f(x) < 0,\ \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $f(x) \leq 0,\ \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

7. MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC THƯỜNG GẶP TRONG ΔABC

1. $0 < \sin A + \sin B + \sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

2. $0 < \sin A.\sin B.\sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

3. $\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C} \ge 2\sqrt{3}$

4. $1 < \cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$

5. $\cos A.\cos B.\cos C \le \dfrac{1}{8}$

6. $\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{1}{\cos B} + \dfrac{1}{\cos C} \ge 6$ *(nếu thêm điều kiện ΔABC nhọn)*

7. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C \ge 3\sqrt{3}$

   (nếu thêm điều kiện ΔABC nhọn)

8. $\cot A + \cot B + \cot C \ge \sqrt{3}$

9. $\cot A.\cot B.\cot C \le \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

10. $1 < \sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{3}{2}$

11. $0 < \sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8}$

12. $\dfrac{1}{\sin\dfrac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin\dfrac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin\dfrac{C}{2}} \ge 6$

13. $2 < \cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2} \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

14. $0 < \cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2} \le \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

15. $\dfrac{1}{\cos\dfrac{A}{2}} + \dfrac{1}{\cos\dfrac{B}{2}} + \dfrac{1}{\cos\dfrac{C}{2}} \ge 2\sqrt{3}$

16. $\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2} \ge \sqrt{3}$

17. $0 < \tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}.\tan\dfrac{C}{2} \ge \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

18. $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$

19. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$

20. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$

21. $\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9$ *(nếu thêm điều kiện ΔABC nhọn)*

22. $\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geq 1$

23. $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$

24. $2 < \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$

25. $\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} \geq 1$

26. $\cot^2\frac{A}{2} + \cot^2\frac{B}{2} + \cot^2\frac{C}{2} \geq 9$

27. *Đặt :* $\begin{cases} m = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \\ n = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \end{cases}$

- ΔABC *nhọn* $\Leftrightarrow$ $\cos A.\cos B.\cos C > 0$ $\Leftrightarrow$ $m > 2$ $\Leftrightarrow$ $n < 1$
- ΔABC *vuông* $\Leftrightarrow$ $\cos A.\cos B.\cos C = 0$ $\Leftrightarrow$ $m = 2$ $\Leftrightarrow$ $n = 1$
- ΔABC *tù* $\Leftrightarrow$ $\cos A.\cos B.\cos C < 0$ $\Leftrightarrow$ $m < 2$ $\Leftrightarrow$ $n > 1$

■ **Chú ý :** + BĐT (1 → 26) có dấu "=" ⇔ ΔABC đều.

+ Các BĐT này "đi thi" phải chứng minh lại.

8. MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC THƯỜNG GẶP KHÁC

- $-1 < \sin x, \cos x \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin x \pm \cos x \leq \sqrt{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $a.\sin x + b.\cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\tan x + \cot x \geq 2, \ \forall x \neq \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$
- $\begin{cases} 0 < \sin A, \sin B, \sin C \leq 1 \\ -1 < \cos A, \cos B, \cos C < 1 \end{cases}$ *(A, B, C là ba góc ΔABC)*
- $\begin{cases} \cos A + \cos B; \ \cos B + \cos C; \ \cos C + \cos A > 0 \\ \cot A + \cot B; \ \cot B + \cot C; \ \cot C + \cot A > 0 \end{cases}$ *(A, B, C là ba góc ΔABC)*

. . .

CÁC DẠNG BÀI TẬP

A. SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ NHẬN DẠNG TAM GIÁC

BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

BÀI 200. Cho ΔABC thỏa : $\cot^2\frac{A}{2} + \cot^2\frac{B}{2} + \cot^2\frac{C}{2} = 9$.

Chứng minh ΔABC đều.

- ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng : $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$

BÀI 201. Nhận dạng ΔABC : $r_a.l_a + r_b.l_b + r_c.l_c = p^2$.

- ***Hướng dẫn :***
  - *Cách 1 :* Sử dụng các công thức :

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

  - *Cách 2 :* Sử dụng các công thức :

$$\begin{cases} r_a = p.\tan\frac{A}{2} \\ l_a = \dfrac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c} \end{cases}$$ kết hợp với định lí hàm cos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{A}{2} \geq 4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

BÀI 202. Cho ΔABC thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 36r^2$. Chứng minh tam giác này đều.

- ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :
  - $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}$
  - $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$

BÀI 203. Cho ΔABC có $\tan\frac{A}{4}, \tan\frac{B}{4}$ là nghiệm phương trình $x^2 + a_1x + b_1 = 0$; $\tan\frac{B}{4}, \tan\frac{C}{4}$ là nghiệm phương trình $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ và $\tan\frac{C}{4}, \tan\frac{A}{4}$ là nghiệm phương trình $x^2 + a_3x + b_3 = 0$.

Chứng minh rằng ΔABC đều nếu :

$$(1 - a_1 + b_1)(1 - a_2 + b_2)(1 - a_3 + b_3) = 5616 - 3240\sqrt{3}.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

$$A + B + C = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B + C}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}$$

$$\Rightarrow tan\frac{B + C}{4} = tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right)$$

$$\Rightarrow tan\frac{A}{4} + tan\frac{B}{4} + tan\frac{C}{4} + tan\frac{A}{4}.tan\frac{B}{4} + tan\frac{B}{4}.tan\frac{C}{4} + tan\frac{C}{4}.tan\frac{A}{4} =$$

$$= 1 + tan\frac{A}{4}.tan\frac{B}{4}.tan\frac{C}{4} \equiv 1 + x^3$$

Sau đó dùng bất đẳng thức Cauchy, đưa đến :

$$1 + x^3 \geq 3x + 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x \leq 2 - \sqrt{3}$$

BÀI 204. Tam giác nhọn ABC thỏa :

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Chứng minh ΔABC đều.

■ ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

- $cosA + cosB = 2sin\frac{C}{2}cos\frac{A - B}{2} \leq 2sin\frac{C}{2}$
- $(cosA + cosB)\left(\frac{1}{cosA} + \frac{1}{cosB}\right) \geq 4$

BÀI 205. Nhận dạng ΔABC, biết tam giác thỏa một trong hai điều kiện sau :

a) $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} = \sqrt{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt{\cos\frac{C}{2}}$

b) $\sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B} + \sqrt{\tan C} = \sqrt{\cot\frac{A}{2}} + \sqrt{\cot\frac{B}{2}} + \sqrt{\cos\frac{C}{2}}$.

■ ***Hướng dẫn :***

a) Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski để chứng minh :

$$\sqrt{sinA} + \sqrt{sinB} \leq 2\sqrt{cos\frac{C}{2}}$$

b) Trước hết chứng minh bất đẳng thức : $tanA.tanB \geq cot^2\frac{C}{2}$

BÀI 206. Cho ΔABC thỏa : $2\left(\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-\sqrt{3}\right)\le \cot B+\cot C$.

Chứng minh ΔABC đều.

- ***Hướng dẫn :*** Biến đổi bất đẳng thức đã cho về dạng :

$$\sin B\left[1-\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\right]+\sin C\left[1-\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\right]\le 0$$

BÀI 207. Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu các góc của tam giác thỏa

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\cos C}=\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}.$$

- ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

- $\sin A+\sin B=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\le 2\cos\frac{C}{2}$
- $(\sin A+\sin B)\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right)\ge 4$

BÀI 208. Hãy tính các góc của ΔABC nếu : $\begin{cases} b^2+c^2\le a^2 \\ \sin A+\sin B+\sin C=1+\sqrt{2}. \end{cases}$

- ***Hướng dẫn :*** Chứng minh rằng :

- $\frac{\pi}{2}\le A<\pi$
- $\sin A+\sin B+\sin C=\sin A+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\le 1+\sqrt{2}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} B=C \\ A=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

BÀI 209. Cho ΔABC thỏa :

$$\cos A+\cos B+\cos C=2(\cos A.\cos B+\cos B.\cos C+\cos C.\cos A).$$

Chứng minh ΔABC đều.

- ***Hướng dẫn :*** Sử dụng các bất đẳng thức :

- $1<\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$
- $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx),\quad \forall x,y,z\in\mathbb{R}.$

BÀI 210. Cho ΔABC thỏa : $\begin{cases} \sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[9]{\sin C} \\ 0 < A,\ B < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Chứng minh ΔABC vuông tại C.

- ***Hướng dẫn :*** Sử dụng định lí hàm cos và kết quả bài 8.

BÀI 211. Nhận dạng tam giác ΔABC biết : $l_a = \sqrt{p(p-a)}$.

- ***Hướng dẫn :*** Sử dụng công thức : $l_a = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$

BÀI 212. Nhận dạng ΔABC, biết rằng :

$$\tan A + \tan B + \tan C = \frac{3(\sin A + \sin B + \sin C)}{\cos A + \cos B + \cos C}.$$

- ***Hướng dẫn :*** Sử dụng bất đẳng thức Trêbưsép.

BÀI 213. Cho ΔABC không tù thỏa : $3(a+b+c) = \pi\left(\dfrac{a}{A} + \dfrac{b}{B} + \dfrac{c}{C}\right)$.

Chứng minh ΔABC đều.

- ***Hướng dẫn :*** Sử dụng bất đẳng thức Trêbưsép và tính đơn điệu giảm của hàm số $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

BÀI 214. Nhận dạng ΔABC biết rằng : $\dfrac{A^{2009} + B^{2009} + C^{2009}}{3} = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{2009}$

- ***Hướng dẫn :*** Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli :

$$\left(\frac{3A}{\pi}\right)^{2009} = \left(1 + \frac{3A - \pi}{\pi}\right)^{2009} \geq 1 + \frac{2009(3A - \pi)}{\pi}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow A = \dfrac{\pi}{3}$.

LỜI GIẢI

BÀI 200.

- *Cách 1 :* Theo bài 10 : $\cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2} = \cot\dfrac{A}{2}.\cot\dfrac{B}{2}.\cot\dfrac{C}{2} > 0$

Vì vậy theo BĐT Cauchy :

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}\right)^3 \geq 27\left(\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \cot^2\frac{A}{2} + \cot^2\frac{B}{2} + \cot^2\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\left(\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}\right)^2} \geq 3\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^2} = 9$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \quad \cot\frac{A}{2} = \cot\frac{B}{2} = \cot\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \quad A = B = C \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ đều.

Vậy : $\cot^2\frac{A}{2} + \cot^2\frac{B}{2} + \cot^2\frac{C}{2} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ đều.

- *Cách 2 :* Xét $f(x) = \cot x,\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}; \qquad f''(x) = \frac{2\cos x}{\sin^3 x} > 0$$

$\Rightarrow$ Theo BĐT Jensen : $f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \geq 2f\left(\frac{A+B+C}{6}\right) = 9$

Dấu "=" $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Vậy : $f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ đều $\Rightarrow$ (đpcm).

- *Cách 3 :* Theo định lí hàm cos :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \geq 2bc - 2bc.\cos A = 4bc.\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} \geq \frac{4bc}{a^2}$$

Chứng minh tương tự : $\dfrac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} \geq \dfrac{4ca}{b^2}; \qquad \dfrac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \geq \dfrac{4ab}{c^2}$

$$\Rightarrow \quad \cot^2\frac{A}{2} + \cot^2\frac{B}{2} + \cot^2\frac{C}{2} = \frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} - 3$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}.\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}.\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}} - 3$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{4bc.4ca.4ab}{a^2.b^2.c^2}} - 3 = 9$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều. Bài toán cũng được chứng minh.

BÀI 201.

- *Cách 1 :* Ta có :

$$\begin{cases} r_a = \dfrac{S}{p-a} = \dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a} = \sqrt{\dfrac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} \\ l_a = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad r_a l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} p\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{b+c}{b+c} p \frac{p-b+p-c}{2} \quad \text{(BĐT Cauchy)}$$

$$\Rightarrow \quad r_a l_a = \frac{ap}{2}. \quad \text{Dấu "=" } \Leftrightarrow b = c$$

Chứng minh tương tự :

$$r_b l_b = \frac{bp}{2}. \quad \text{Dấu "=" } \Leftrightarrow c = a$$

$$r_c l_c = \frac{cp}{2}. \quad \text{Dấu "=" } \Leftrightarrow a = b$$

Vậy : $r_a l_a + r_b l_b + r_c l_c \leq \dfrac{p(a+b+c)}{2} = p^2$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ a = b = c $\Leftrightarrow$ ΔABC đều

Như vậy : $r_a l_a + r_b l_b + r_c l_c = p^2 \Leftrightarrow \Delta$ABC đều.

- *Cách 2 :* Ta có :

$$\begin{cases} r_a = p\tan\dfrac{A}{2} \\ l_a = \dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c} \end{cases} \Rightarrow \quad r_a l_a = \frac{2bc}{b+c} p\sin\frac{A}{2}$$

Theo bài 200, ta có : $a^2 \geq 4bc\sin^2\dfrac{A}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\dfrac{A}{2} \leq \dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$

$$\Rightarrow \quad r_a l_a \leq \frac{2bc}{b+c} p \frac{a}{2\sqrt{bc}} \leq \frac{\sqrt{bc}}{b+c} pa \quad \Rightarrow \quad r_a l_a \leq \frac{\frac{b+c}{2}}{b+c} pa = \frac{ap}{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ b = c ... tiếp tục như cách 1.

BÀI 202.

- *Cách 1 :* Theo BĐT Cauchy :

$$S^2 = p^2.r^2 = p(p - a)(p - b)(p - c) \le p\left(\frac{p - a + p - b + p - c}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow \quad p^2.r^2 \le \frac{p^4}{27} \quad \Leftrightarrow, \quad 27r^2 \le p^2 = \frac{1}{4}(a + b + c)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 27r^2 \le \frac{1}{4}[3(a^2 + b^2 + c^2) - (a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2]$$

$$\Rightarrow \quad 27r^2 \le \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \quad \Rightarrow \quad 36r^2 \le a^2 + b^2 + c^2$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ p - a = p - b = p - c \end{cases} \Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Vậy : $a^2 + b^2 + c^2 = 36r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ đều.

- *Cách 2 :* Theo BĐT Cauchy :

$$36r^2 = 36\frac{S^2}{p^2} = \frac{36}{p}(p - a)(p - b)(p - c)$$

$$36r^2 = \frac{36}{p}\sqrt{(p - a)(p - b)}.\sqrt{(p - b)(p - c)}.\sqrt{(p - c)(p - a)}$$

$$\le \frac{36}{p}.\frac{p - a + p - b}{2}.\frac{p - b + p - c}{2}.\frac{p - c + p - a}{2} \le \frac{9abc}{a + b + c}$$

Và : $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca + \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

$$\ge ab + bc + ca$$

Do đó : $a^2 + b^2 + c^2 = 3r^2 \quad \Rightarrow \quad ab + bc + ca \le \dfrac{9abc}{a + b + c}$

$$\Rightarrow \quad a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \le 0$$

$$\Rightarrow \quad a = b = c \quad \Rightarrow \quad \text{(đpcm)}.$$

■ **Chú ý :** Qua cách làm bài toán này, ta chứng minh được một số BĐT quen thuộc sau :

1. $3(a^2 + b^2 + c^2) \ge (a + b + c)^2 \ge 3(ab + bc + ca)$

2. $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 9$

3. $abc \ge 8(p - a)(p - b)(p - c)$ hay : $abc \ge (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$.

BÀI 203. Theo giả thiết, ta có :

$$x^2 + a_1x + b_1 = \left(x - \tan\frac{A}{4}\right).\left(x - \tan\frac{B}{4}\right)$$

$$x^2 + a_2x + b_2 = \left(x - \tan\frac{B}{4}\right).\left(x - \tan\frac{C}{4}\right)$$

$$x^2 + a_3x + b_3 = \left(x - \tan\frac{C}{4}\right).\left(x - \tan\frac{A}{4}\right)$$

Cho $x = -1$. Suy ra : $(1 - a_1 + b_1)(1 - a_2 + b_2)(1 - a_3 + b_3)$

$$= \left(1 + \tan\frac{A}{4}\right)^2\left(1 + \tan\frac{B}{4}\right)^2\left(1 + \tan\frac{C}{4}\right)^2$$

$$= \left[1 + \left(\tan\frac{A}{4} + \tan\frac{B}{4} + \tan\frac{C}{4}\right) + \left(\tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4} + \tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4} + \tan\frac{C}{4}.\tan\frac{A}{4}\right) + \right.$$

$$\left. + \tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4}\right]^2$$

Mặt khác :

- $A + B + C = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B+C}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{A}{4} \quad \Rightarrow \tan\frac{B+C}{4} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{B}{4} + \tan\frac{C}{4}}{1 - \tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4}} = \frac{1 - \tan\frac{A}{4}}{1 + \tan\frac{A}{4}}$$

$$\Rightarrow \left(\tan\frac{B}{4} + \tan\frac{C}{4}\right)\left(1 + \tan\frac{A}{4}\right) = \left(1 - \tan\frac{A}{4}\right)\left(1 - \tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{4} + \tan\frac{B}{4} + \tan\frac{C}{4} + \tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4} + \tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4} + \tan\frac{C}{4}.\tan\frac{A}{4} =$$

$$= 1 + \tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4}$$

$$\Rightarrow (1 - a_1 + b_1)(1 - a_2 + b_2)(1 - a_3 + b_3) = 4\left(1 + \tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\right)^2$$

- Và theo BĐT Cauchy :

$$1 + x^3 = 1 + \tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4}$$

$$= \tan\frac{A}{4} + \tan\frac{B}{4} + \tan\frac{C}{4} + \tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4} + \tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4} + \tan\frac{C}{4}.\tan\frac{A}{4}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4}} + \sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4}\right)^2}$$

$$\geq 3x + 3x^2 \quad \left(\text{với } x = \sqrt[3]{\tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4}} \in (0;\ 1)\right)$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1)(x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3}) \geq 0$$

Vì $0 < x < 1$, nên : $x - 2 + \sqrt{3} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x \leq 2 - \sqrt{3}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều (?!)

$$\Rightarrow (1 - a_1 + b_1)(1 - a_2 + b_2)(1 - a_3 + b_3) = 4(1 + x^3)^2 \leq 4[1 + (2 - \sqrt{3})^3]^2$$

$$\leq 4[1 + (26 - 15\sqrt{3})]^2 \leq (54 - 30\sqrt{3})^2 \leq 5616 - 3240\sqrt{3}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều $\Rightarrow$ (đpcm).

■ **Chú ý :**

- Nếu x_1, x_2 là nghiệm của phương trình bậc 2 : $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ thì $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 1 + (x + y + z) + (xy + yz + zx) + xyz$
- A, B, C là góc tam giác nên : $\frac{A}{4}, \frac{B}{4}, \frac{C}{4} \in \left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{A}{4}, \tan\frac{B}{4}, \tan\frac{C}{4} \in (0;\ 1) \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4} \in (0;\ 1)$$

- Bạn đọc nên kiểm tra lại dấu "=" BĐT trên (?!). Có thể xem điều này ở bài 269.

BÀI 204.

ΔABC nhọn $\Leftrightarrow$ cosA, cosB, cosC > 0. Theo BĐT Cauchy :

$$(\cos A + \cos B)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B}\right) \geq 2\sqrt{\cos A.\cos B}.2\sqrt{\frac{1}{\cos A.\cos B}} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} \geq \frac{4}{\cos A + \cos B} = \frac{4}{2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{4}{2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} \geq \frac{2}{\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}} \geq \frac{2}{\sin\frac{C}{2}} \quad \left(\text{vì } 0 < \cos\frac{A-B}{2} \leq 1\right)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ A = B.

Chứng minh tương tự :

$$\frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geq \frac{2}{\sin\frac{A}{2}}. \quad \text{Dấu "="} \Leftrightarrow B = C.$$

$$\frac{1}{\cos C} + \frac{1}{\cos A} \geq \frac{2}{\sin\frac{B}{2}}.\quad \text{Dấu "="} \Leftrightarrow C = A.$$

Cộng vế với vế các BĐT trên, ta được :

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geq \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Vậy : $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geq \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

BÀI 205.

a) (Trong $\Delta ABC \Rightarrow \sin A, \sin B, \sin C > 0$)

Theo BĐT B.C.S :

$$\left(\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B}\right)^2 \leq 2(\sin A + \sin B) = 4\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\leq 4\sin\frac{A+B}{2} = 4\cos\frac{C}{2}$$

$\Rightarrow \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \leq 2\sqrt{\cos\frac{C}{2}}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow A = B$.

Chứng minh tương tự : $\sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq 2\sqrt{\cos\frac{A}{2}}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow B = C$

$\sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin A} \leq 2\sqrt{\cos\frac{B}{2}}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow C = A$

Cộng vế với vế các BĐT, ta được :

$$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq \sqrt{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt{\cos\frac{C}{2}}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Vậy : $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} = \sqrt{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt{\cos\frac{C}{2}} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

b) (Giả thiết suy ra ΔABC nhọn).

Ta có : $\sin A.\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)] = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos C]$

$\cos A.\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)] = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos C]$

(vì ΔABC nhọn $\Rightarrow \cos A, \cos B > 0 \Rightarrow 1 \geq \cos(A - B) > \cos C > 0$)

Xét : $f(x) = \dfrac{x + \cos C}{x - \cos C}$, $x \in (\cos C; 1]$

$\Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{-2\cos C}{(x - \cos C)^2} < 0, \forall x \in (\cos C; 1]$

$\Rightarrow$ f là hàm giảm trên $(\cos C; 1]$ $\quad \Rightarrow \quad f(\cos(A - B)) \geq f(1)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos(A - B) + \cos C}{\cos(A - B) - \cos C} \geq \frac{1 + \cos C}{1 - \cos C} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin A.\sin B}{\cos A.\cos B} \geq \frac{2\cos^2\frac{C}{2}}{2\sin^2\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \tan A.\tan B \geq \cot^2\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\cot\frac{C}{2}} \leq \sqrt[4]{\tan A.\tan B} \leq \frac{\sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B}}{2} \quad \text{(do BĐT Cauchy)}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B} \geq 2\sqrt{\cot\frac{C}{2}}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ A = B (Bạn đọc tự kiểm tra)

Chứng minh tương tự : $\sqrt{\tan B} + \sqrt{\tan C} \geq 2\sqrt{\cot\frac{A}{2}}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow$ B = C

$\sqrt{\tan C} + \sqrt{\tan A} \geq 2\sqrt{\cot\frac{B}{2}}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow$ C = A

Vậy : $\sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B} + \sqrt{\tan C} \geq \sqrt{\cot\frac{A}{2}} + \sqrt{\cot\frac{B}{2}} + \sqrt{\cot\frac{C}{2}}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ A = B = C $\Leftrightarrow$ ΔABC đều $\Rightarrow$ (đpcm).

BÀI 206. Giả thiết $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(\sin B + \sin C - \sqrt{3}\sin B.\sin C) \leq \sin B.\cos C + \sin C.\cos B$

$\Leftrightarrow \sin B[2 - (\sqrt{3}\sin C + \cos C)] + \sin C[2 - (\sqrt{3}\sin B + \cos B)] \leq 0$

$$\Leftrightarrow \sin B\left[2 - 2\sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right)\right] + \sin C\left[2 - 2\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right)\right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin B\left[1 - \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right)\right] + \sin C\left[1 - \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right)\right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{\pi}{3} \\ C = \frac{\pi}{3} \end{cases} \text{(Bạn đọc tự kiểm tra)} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

BÀI 207. ■ **Chú ý :** Bài này tương tự bài 204.

Theo BĐT Cauchy :

$$(\sin A + \sin B)\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B}\right) \geq 2\sqrt{\sin A.\sin B}.2\sqrt{\frac{1}{\sin A.\sin B}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} \geq \frac{4}{\sin A + \sin B} = \frac{4}{2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} \geq \frac{2}{\cos\frac{C}{2}} \quad \left(\text{vì } 0 < \sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} \leq \sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}\right)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ A = B.

Chứng minh tương tự : $\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq \frac{2}{\cos\frac{A}{2}}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow$ B = C

$\frac{1}{\sin C} + \frac{1}{\sin A} \geq \frac{2}{\cos\frac{B}{2}}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow$ C = A

Cộng vế với vế 3 BĐT trên, ta được :

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\cos C} \geq \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ A = B = C $\Leftrightarrow$ ΔABC đều $\Rightarrow$ (đpcm).

■ **Chú ý :** Bài toán này với bài toán sau là một :

"ΔABC đều $\Leftrightarrow$ $\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2} - \left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right) =$

$= \cot A + \cot B + \cot C$"

Bạn đọc tự giải (Đưa bài này về bài 207) !

BÀI 208. Ta có : $b^2 + c^2 \leq a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \Rightarrow \cos A \leq 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq A < \pi$

Do đó : $\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + 2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}$

$$\leq \sin A + 2\sin\frac{B+C}{2} \leq 1 + 2\cos\frac{A}{2}$$

$$\leq 1 + 2\cos\frac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}$$

(vì $0 < \sin A \le 1,\ \frac{\pi}{2} \le A < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{A}{2} \le \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

$$\Rightarrow \quad \sin A + \sin B + \sin C \le 1 + \sqrt{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ A = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Vậy : $\begin{cases} b^2 + c^2 \le a^2 \\ \sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ B = C = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

BÀI 209. Ta có : • $x = \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} > 1$

(Bạn đọc xem lại bài 6)

• $x = \cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + \cos C$

$$\le 2\cos\frac{A+B}{2} + \cos C \le 2\sin\frac{C}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} \le \frac{3}{2} - 2\left(\sin^2\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$\le \frac{3}{2} - 2\left(\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x \le \frac{3}{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{A-B}{2} = 1 \\ \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C = 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Từ đó : $x = \cos A + \cos B + \cos C = 2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A)$

$$= \frac{2}{3}\Big[(\cos A + \cos B + \cos C)^2 - \frac{1}{2}(\cos A - \cos B)^2 -$$

$$- \frac{1}{2}(\cos B - \cos C)^2 - \frac{1}{2}(\cos C - \cos A)^2\Big]$$

$$\le \frac{2}{3}(\cos A + \cos B + \cos C)^2 = \frac{2}{3}x^2$$

$$\Rightarrow \quad x \le \frac{2}{3}x^2 \quad \Rightarrow \quad 3x \le 2x^2$$

Vậy : $\begin{cases} 3x \ge 2x^2 \\ 1 < x \le \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \le x \\ 1 < x \le \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$ ΔABC đều $\Rightarrow$ (đpcm).

■ **Chú ý :** Ta có thể dùng trực tiếp BĐT :

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx),\ \forall x, y, z \in \mathbf{R}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = y = z$. (Phần chứng minh BĐT này dành cho bạn đọc).

BÀI 210. Theo bài 8 : $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[9]{\sin C} + \sin^2 C = 2 + 2\cos A.\cos B$$

Mà : $0 < \sin C \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[9]{\sin C} + \sin^2 C \leq 2$

$$\Rightarrow \quad 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C \leq 2$$

$$\Rightarrow \quad \cos A.\cos B.\cos C \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C \leq 0 \text{ (vì A, B nhọn)} \qquad (1)$$

Mặt khác, cũng từ : $0 < \sin C \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[9]{\sin C} \geq \sin^2 C$

$$\Rightarrow \quad \sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[9]{\sin C} \geq \sin^2 C$$

$$\Rightarrow \quad (2R\sin A)^2 + (2R\sin B)^2 \geq (2R\sin C)^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 \geq c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C \quad \Rightarrow \quad \cos C \geq 0 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \cos C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$ (đpcm).

■ **Chú ý :** Bạn đọc nên tham khảo thêm bài 266.

BÀI 211. Ta có : $l_a = \dfrac{2}{b + c}\sqrt{bc.p(p - a)}$

Nên : $\sqrt{p(p - a)} = \dfrac{2}{b + c}\sqrt{bc.p(p - a)} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \dfrac{2}{b + c}\sqrt{bc}$

$$\Leftrightarrow \quad b + c = 2\sqrt{bc} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b = c \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC \text{ cân tại A.}$$

Hoặc chứng minh trực tiếp :

$$l_a = \frac{2}{b + c}\sqrt{bc.p(p - a)} \leq \frac{2}{2\sqrt{bc}}\sqrt{bc.p(p - a)}$$

$$\Rightarrow \quad l_a \leq \sqrt{p(p - a)} \quad \text{(do BĐT Cauchy)}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow b = c \Rightarrow$ (đpcm).

BÀI 212. Ta có :

- $\sin A + \sin B + \sin C > 0$
- $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 3\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} > 1$

  (Bạn đọc xem lại bài 210 hoặc bài 6)
- $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$

  (Bạn đọc xem lại bài 9)

Giả thiết suy ra : tanA.tanB.tanC > 0 $\Rightarrow$ ΔABC nhọn

Không giảm tính tổng quát, ta xem : $\frac{\pi}{2} > A \geq B \geq C > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan A \geq \tan B \geq \tan C > 0 \\ 0 < \cos A \leq \cos B \leq \cos C \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Theo BĐT Trêbưsếp :

$$\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{3} \cdot \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \geq \frac{\tan A.\cos A + \tan B.\cos B + \tan C.\cos C}{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq \frac{3(\sin A + \sin B + \sin C)}{\cos A + \cos B + \cos C}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều (?!). Vậy giả thiết suy ra ΔABC đều.

BÀI 213. Xét $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} < 0 \quad \text{(vì : } x.\cos x < x < \sin x)$$

$$\Rightarrow \quad \text{f giảm trên } \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Hơn nữa : không giảm tính tổng quát, ta xem : $0 < A \leq B \leq C \leq \frac{\pi}{2}$

Nên : $f(A) \geq f(B) \geq f(C)$ $\Rightarrow$ $\frac{\sin A}{A} \geq \frac{\sin B}{B} \geq \frac{\sin C}{C}$ $\Rightarrow$ $\frac{a}{A} \geq \frac{b}{B} \geq \frac{c}{C}$

$$\text{Vậy : } \begin{cases} A \leq B \leq C \\ \frac{a}{A} \geq \frac{b}{B} \geq \frac{c}{C} \end{cases}$$

Nên theo BĐT Trêbưsếp :

$$\frac{1}{9}(A + B + C)\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C}\right) \geq \frac{1}{3}\left(A.\frac{a}{A} + B.\frac{b}{B} + C.\frac{c}{C}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \pi\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C}\right) \geq 3(a + b + c)$$

$$\text{Dấu "=" } \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B = C \\ \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} \end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Vậy với giả thiết trên thì ΔABC đều.

BÀI 214.

- *Cách 1 :* Theo BĐT Bernoulli :

$$\left(\frac{3A}{\pi}\right)^{2009} = \left(1 + \frac{3A - \pi}{\pi}\right)^{2009} \geq 1 + \frac{2009.(3A - \pi)}{\pi}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \dfrac{3A - \pi}{\pi} = 0 \Leftrightarrow A = \dfrac{\pi}{3}$

Chứng minh tương tự :

$$\left(\frac{3B}{\pi}\right)^{2009} \geq 1 + \frac{2009(3B - \pi)}{\pi}. \qquad \text{Dấu "="} \Leftrightarrow B = \frac{\pi}{3}$$

$$\left(\frac{3C}{\pi}\right)^{2009} \geq 1 + \frac{2009(3C - \pi)}{\pi}. \qquad \text{Dấu "="} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{3}$$

Cộng vế với vế 3 BĐT trên, ta được :

$$\left(\frac{3A}{\pi}\right)^{2009} + \left(\frac{3B}{\pi}\right)^{2009} + \left(\frac{3C}{\pi}\right)^{2009} \geq 3 \quad (\text{vì } A + B + C = \pi)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{A^{2009} + B^{2009} + C^{2009}}{3} \geq \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2009}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow A = B = C = \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

- *Cách 2* : Xét : $f(x) = x^{2009}, x \in (0; \pi)$

$$f'(x) = 2009.x^{2008}$$

$$f''(x) = 2009.2008.x^{2007} > 0$$

$\Rightarrow$ Theo BĐT Jensen :

$$\frac{f(A) + f(B) + f(C)}{3} \geq f\left(\frac{A + B + C}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2009} \quad (\text{vì } A + B + C = \pi)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Vậy : $\dfrac{A^{2009} + B^{2009} + C^{2009}}{3} = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{2009} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

215*. Chứng minh rằng (trong ΔABC) các điều kiện sau là tương đương :

a) ΔABC đều.

b) $\cos A + \cos B + \cos C + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 0$

c) $\tan A + \tan B + \tan C + \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = 0$

c) $\cot A + \cot B + \cot C + \cot 2A + \cot 2B + \cot 2C = 0.$

216*. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với 3 cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Xác định tính chất ΔABC, biết :

$$\frac{AP^{2009}}{PB^{2008}} + \frac{BM^{2009}}{MC^{2008}} + \frac{CN^{2009}}{NA^{2008}} = \frac{a+b+c}{2}.$$

217. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $\tan^6\frac{A}{2} + \tan^6\frac{B}{2} + \tan^6\frac{C}{2} = \frac{1}{9}$.

218. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2 + 4r^2$.

219. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $\sqrt{3}\cos A + 2\cos B + 2\sqrt{3}\cos C = 4$.

220. Cho ΔABC, đặt : $x_a = \frac{l_a}{AI}$, $x_b = \frac{l_b}{BI}$ và $x_c = \frac{l_c}{CI}$

(với I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC). Chứng minh rằng :

$$\text{"}\Delta ABC \text{ đều } \Leftrightarrow \frac{x_a}{\sin^2 A} + \frac{x_b}{\sin^2 B} + \frac{x_c}{\sin^2 C} = 6\text{"}$$

221. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $a^2 + b^2 + c^2 = 4S\sqrt{3}$.

222*. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{c+a} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

223*. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) = 0$.

224*. Cho ΔABC có chu vi bằng 1 thỏa : $ab + bc + ca - 2abc = \frac{7}{27}$.

Chứng minh ΔABC đều.

225. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $r_a + r_b + r_c = \sqrt{3}p$.

226. Cho ΔABC thỏa : $3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$.

Chứng minh ΔABC vuông tại A.

227. Cho ΔABC thỏa : $p^2 = 31r^2 - R^2$. Chứng minh tam giác này đều.

228. ΔABC có tính chất gì, nếu : $r_a + r_b + r_c = h_a + h_b + h_c$.

229. ΔABC có tính chất gì, nếu : $m_a + m_b + m_c = l_a + l_b + l_c$.

230. ΔABC có tính chất gì, nếu : $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{4R}{r}$.

231. Chứng minh rằng (trong ΔABC) các điều sau là tương đương :

a) $\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{a} + \frac{\cos^2\frac{B}{2}}{b} + \frac{\cos^2\frac{C}{2}}{c} = \frac{27r}{8S}$

b) $3\sqrt{3}\,IA.IB.IC = a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2$

(với I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC)

c) $a + b - \dfrac{c}{2} = hc.\sqrt{3}$

d) $$\frac{a^2\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{b^2\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{c^2\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

e) $$\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{4\sqrt{2}} + \left(\tan\frac{B}{2}\right)^{4\sqrt{2}} + \left(\tan\frac{C}{2}\right)^{4\sqrt{2}} = 3$$

f) ΔABC đều.

232. Cho ΔABC có : $\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2} = \sqrt{3} + \dfrac{3}{2}$.

Chứng minh ΔABC đều.

233*. Chứng minh rằng trong ΔABC : "$h_a + h_b + h_c = 9r \Leftrightarrow r_a + r_b + r_c = 9r$".

234. Cho ΔABC có : $S = \dfrac{\sqrt{3}}{36}(a + b + c)^2$. Chứng minh ΔABC đều.

235. Cho ΔABC có : $\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{\sqrt{ac}}{4b^2}$. Chứng minh ΔABC đều.

236. Cho ΔABC có : $\sqrt{\sin\dfrac{A}{2}}.\left(\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Chứng minh ΔABC cân tại A.

237*. Cho ΔABC không tù. Hãy nhận dạng tam giác này, biết :

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

238. ΔABC cân có một góc là nghiệm phương trình : $\cot\dfrac{x}{2} + \cot x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chứng minh ΔABC đều.

239. ΔABC có tính chất gì, nếu (tam giác thỏa một trong các điều kiện sau):

a) $\begin{cases} 3r = r_a \\ 5r = 2R \end{cases}$ b) $(ab + bc + ca)\left(\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}\right) = 18$

c) $r_a + r_b + r_c + r = a + b + c$

d) $$\left(1 + \frac{1001}{\sin A}\right)\left(1 + \frac{1001}{\sin B}\right)\left(1 + \frac{1001}{\sin C}\right) = \left(1 + \frac{2002}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

240. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $m_a + m_b + m_c = \dfrac{9R}{2}$.

241*. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $T = \dfrac{h_a}{m_b} + \dfrac{h_b}{m_c} + \dfrac{h_c}{m_a} = 3$.

(Bài toán Jack Garfunkel, đây là bài toán sơ cấp nổi tiếng thế giới, rất khó). Thực chất bài toán này là chứng minh :

$$T \geq 3,\ \text{dấu "="} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

242. Cho ΔABC thỏa : $(2 + \cos 2A)^{-1} + 2(\cos 2B)^{-1} + (2 - \cos 2C)^{-1} = \dfrac{6}{5}$.

Chứng minh : $C = 4A = 4B$.

243. Cho ΔABC có 3 góc nhọn, H là trực tâm. Chứng minh :

$$\text{"}\Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow \frac{8(S_1 + S_2 + S_3)^3}{27S_1.S_2.S_3} = \frac{4R}{r}\text{"}$$

với $S_1 = S_{\Delta HBC}$, $S_2 = S_{\Delta HCA}$, $S_3 = S_{\Delta HAB}$.

244. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $\begin{cases} a, b, c \text{ là cấp số cộng} \\ a^{2009} + c^{2009} = 2.b^{2009} \end{cases}$

245. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $\begin{cases} m_b = l_b \\ l_a = h_a \end{cases}$

246. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $\begin{cases} 0 < A \leq B \leq C < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos A^{-2} + \cos B^{-2} + \cos C^{-2} = 12 \end{cases}$

247. Nhận dạng ΔABC, biết rằng :

$$\cot A + \cot B + \cot C + 3\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right).$$

248. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $2\left(\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{1}{\cos B}\right) = \sqrt{3}(\tan A + \tan B) + 2$.

B. BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

BÀI 249. Cho ΔABC.

a) Chứng minh rằng : $16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$.

b) Từ đó suy ra : $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$.

■ ***Hướng dẫn :***

a) Dùng định lí hàm cos hoặc công thức Hêrông :

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

b) Chú ý rằng : $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^4 + b^4 + c^4$

BÀI 250. Chứng minh rằng :

a) $(1 + x)(1 + y)(1 + z) \geq \left(1 + \sqrt[3]{xyz}\right)^3, \ \forall x, y, z \geq 0$

b) $\left(1 + \dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \geq 27$ với A, B, C là ba góc của ΔABC

■ ***Hướng dẫn :***

a) Dùng bất đẳng thức Cauchy.

b) Dùng định lí hàm cos : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos A)$

$$\geq 2bc(1 - \cos A) = 4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

BÀI 251. Cho ΔABC. Chứng minh : $r.r_a \leq \dfrac{a^2}{4}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng bất đẳng thức Cauchy :

$$r.r_a = \frac{S}{p}.\frac{S}{p-a} = \frac{S^2}{p(p-a)} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$$

$$= (p-b)(p-c) \leq \frac{a^2}{4}$$

BÀI 252. Cho ΔABC. Chứng minh : $\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{1}{8}$.

■ ***Hướng dẫn :***

- *Cách 1 :* Dùng định lí hàm cos.
- *Cách 2 :* Biến đổi vế trái :

$$\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8}\cos^2\frac{B-C}{2} - \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{8}$$

- *Cách 3 :* Sử dụng bất đẳng thức Jensen

(cho hàm $f(x) = \ln(\sin x)$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$)

BÀI 253. a) Chứng minh rằng : $\dfrac{x^3 + y^3}{2} \geq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3$, $\forall x, y$ thỏa $x + y \geq 0$.

b) Tìm Maxp, $p = \dfrac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

$$\left(\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}\right)^3 \le 4(\sin A+\sin B) \le 8\cos\frac{C}{2}$$

BÀI 254. Cho ΔABC. Chứng minh :

a) $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C \le \dfrac{9}{4}$ b) $m_a+m_b+m_c = \dfrac{9R}{2}$.

■ ***Hướng dẫn :***

a) Ta có : $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C = 2+\cos C.\cos(A-B)-\cos^2C \le \ldots \le \dfrac{9}{4}$

b) Sử dụng công thức về trung tuyến suy ra :

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

BÀI 255. a) Cho $x > y \ge 0$, $1 \le n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh : $x^n - y^n \ge (x-y)^n$.

b) Cho $x, y, z > 0$, $1 \le n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh : $\dfrac{x^n+y^n+z^n}{3} \ge \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^n$.

c) Cho ΔABC. Chứng minh :

i) $a^2+b^2+c^2 \ge 4S\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

ii) $a^{2n}+b^{2n}+c^{2n} \ge 3\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)^n.S^n+(a-b)^{2n}+(b-c)^{2n}+(c-a)^{2n}$ $(1 \le n \in \mathbb{Z})$.

■ ***Hướng dẫn :***

a) Ta có : $x^n = [(x-y)+y]^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k(x-y)^k y^{n-k} \ge (x-y)^n+y^n$

b) Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli.

c) Đặt $x = p-a$; $y = p-b$; $z = p-c$ và liên hệ với công thức Hêrông :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

BÀI 256. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $a^2 = (b-c)^2 + 4S\tan\dfrac{A}{2}$ b) $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2} \ge \sqrt{3}$

c) $a^2+b^2+c^2 \ge 4S\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

d) $\dfrac{p}{q+r}.a^2+\dfrac{q}{r+p}.b^2+\dfrac{r}{p+q}.c^2 \ge 2\sqrt{3}S$.

■ ***Hướng dẫn :***

a) Dùng định lí hàm cos.

b) Dùng bất đẳng thức : $tan\frac{A}{2} + tan\frac{B}{2} + tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

c) Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski.

BÀI 257. Cho ΔABC nhọn. Chứng minh rằng :

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$

b) $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$

c) $\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3(\sqrt{3})^n, \ \forall n \geq 1.$

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng bất đẳng thức Cauchy.

BÀI 258. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $1 + \frac{x^2}{2} \geq \cos A + x(\cos B + \cos C), \ \forall x \in \mathbf{R}$

b) $\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C \leq \frac{9}{8} + \frac{1}{4}(\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C).$

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức tam thức bậc hai :

$$x^2 + bx + c \geq 0, \ \forall x \in \boldsymbol{R} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta = b^2 - 4c \leq 0$$

BÀI 259. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

$$yz.\cos A + zx.\cos B + xy.\cos C \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \ \forall x, y, z \in \mathbf{R}.$$

■ ***Hướng dẫn :***

- Dùng công thức tam thức bậc hai.
- Hoặc có thể dùng phương pháp vectơ cũng cho kết quả gọn.

BÀI 260. Cho ΔABC. Chứng minh :

$$yz.\cos 2A + zx.\cos 2B + zy.\cos 2C \geq -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \ \forall x, y, z \in \mathbf{R}.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Tương tự bài 259.

BÀI 261. Trong ΔABC, tìm giá trị nhỏ nhất của : $T = \cot A + \cot B + \cot C$.

■ ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

- $cotA.cotB + cotB.cotC + cotC.cotA = 1$
- $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx), \ \forall x, y, z \in \boldsymbol{R}$

BÀI 262. Cho ΔABC có : $2\tan B = \tan A + \tan C$. Tìm Min$B$.

- ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

$$\tan A + \tan C = \frac{\sin(A+C)}{\cos A\cos C} = \frac{\sin B}{\cos A.\cos C} = \frac{2\sin B}{\cos(A-C) - \cos B}$$

BÀI 263. Cho ΔABC thỏa : $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -1$.

Chứng minh : $\sin A + \sin B + \sin C \leq 1 + \sqrt{2}$.

- ***Hướng dẫn :*** Dùng kết quả bài 7.

BÀI 264. Cho ΔABC có 3 góc nhọn. Chứng minh rằng :

$$\sqrt[3]{\sin 2A} + \sqrt[3]{\sin 2B} + \sqrt[3]{\sin 2C} \leq \sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}.$$

- ***Hướng dẫn :*** Dùng bất đẳng thức : $\dfrac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{3}\right)^3$, $\forall a, b \geq 0$

BÀI 265. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC :

$$\left(1 + \tan\frac{A}{2}\right)\left(1 + \tan\frac{B}{2}\right)\left(1 + \tan\frac{C}{2}\right) \geq 2 + \sqrt{3} + \frac{S}{p^2}.$$

- ***Hướng dẫn :*** Sử dụng các kết quả :

- $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2} = 1$
- $\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

BÀI 266. Cho ΔABC có A, B nhọn thỏa $\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt{\sin C}$.

Chứng minh ΔABC vuông tại C.

- ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

$$2 + 2\cos A.\cos B.\cos C = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 C + \sqrt{\sin C} \leq 2$$

$$\Rightarrow \quad \cos A.\cos B.\cos C \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \cos C \leq 0$$

BÀI 267. Cho ΔABC nhọn. Chứng minh : $(2 - \cos^2 A)(2 - \cos^2 B)(2 - \cos^2 C) > 4$.

- ***Hướng dẫn :***

- *Cách 1 :* Ta có ΔABC nhọn $\Rightarrow \cos A, \cos B, \cos C > 0$

  $\Rightarrow 0 < \cos C = -\cos(A+B) = \sin A.\sin B - \cos A.\cos B < \sin A.\sin B$

  $\Rightarrow \cos^2 C < \sin^2 A.\sin^2 B$

- *Cách 2 :* Để ý rằng : $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C$

BÀI 268. Cho ΔABC. Chứng minh : $\frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$.

- ***Hướng dẫn :*** Dùng bất đẳng thức Cauchy.

BÀI 269. Cho ΔABC. Tìm MaxT, $T = \tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4}$.

- ***Hướng dẫn :*** Sử dụng đẳng thức :

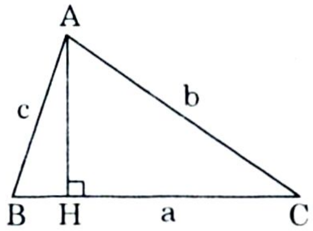
$$\tan\frac{A}{4} + \tan\frac{B}{4} + \tan\frac{C}{4} + \tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4} + \tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4} + \tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4} =$$

$$= 1 + \tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}$$

BÀI 270. Cho ΔABC. Chứng minh : $16S \le 3a^2 + 2b^2 + 2c^2$.

- ***Hướng dẫn :***

Dùng định lí Pitago.



BÀI 271. Cho ΔABC thỏa : $0 < C \le B < A \le \frac{\pi}{2}$.

Tìm Min(M) với $M = \cos\frac{A-B}{2}.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}$.

- ***Hướng dẫn :*** Để ý rằng :

Do $0 < C \le B < A \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \sin C \le \sin B < \sin A \le 1 \\ 1 > \cos C \ge \cos B > \cos A \ge 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \sin C.\cos(A - B) = \sin(A + B)\cos(A - B) = \frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B)$$

$$= \sin A.\cos A + \sin B.\cos B$$

$$\ge \sin C.\cos A + \sin C.\cos B \ge \sin C(\cos A + \cos B)$$

$\Rightarrow \quad \cos(A - B) \ge \cos A + \cos B.$ Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ A = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

BÀI 272. Cho M nằm trong ΔABC. Gọi p, q, r là các khoảng cách từ M đến BC, CA, AB. Chứng minh rằng : $MA + MB + MC \ge 2(p + q + r)$.

- ***Hướng dẫn :*** Sử dụng định lí hàm sin và định lí hàm cos.

BÀI 273. Cho M nằm trong ΔABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{C}{2}} \geq 12$

b) $\left(\dfrac{MA}{MB_1 + MC_1}\right)^2 + \left(\dfrac{MB}{MC_1 + MA_1}\right)^2 + \left(\dfrac{MC}{MA_1 + MB_1}\right)^2 \geq 3$.

- ***Hướng dẫn :***

a) Dùng bất đẳng thức Cauchy.

b) Dùng định lí hàm sin.

BÀI 274. Cho ΔABC, BE, CF là các đường phân giác trong ΔABC. Chứng minh rằng :

$$p(DEF) \leq \frac{1}{2}p(ABC), \text{ trong đó : } p(XYZ) \text{ chỉ chu vi } \Delta XYZ.$$

- ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos và bất đẳng thức Cauchy, hãy chứng minh :

$$EF^2 = \frac{a^2bc}{(a+b)(c+a)} + \frac{bc[(b^2+c^2)(a+b)(c+a) - bc(a+b)^2 - bc(c+a)^2]}{(a+b)^2(c+a)^2}$$

$$\leq \frac{a^2bc}{(a+b)(c+a)}$$

Từ đó, ta có : $EF^2 \leq \dfrac{a^2bc}{2\sqrt{ab}.2\sqrt{ca}} = \dfrac{a\sqrt{bc}}{4}$

$$\Rightarrow \quad 2EF \leq \sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{b}.\sqrt[4]{c} \leq \frac{2a+b+c}{4} \quad \Rightarrow \quad EF \leq \frac{2a+b+c}{8}$$

BÀI 275. a) Chứng minh : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geq \dfrac{9}{x+y+z}$, $\forall x, y, z > 0$.

b) Trong ΔABC, tìm Minp.

$$p = (2 + \cos 2A)^{-1} + (2 + \cos 2B)^{-1} + (2 - \cos 2C)^{-1}.$$

- ***Hướng dẫn :***

a) Dùng bất đẳng thức Cauchy hoặc bất đẳng thức Bunhiacopski.

b) Chú ý : $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = -2\cos C.\cos(A-B) - (2\cos^2 C - 1)$

$$= -2\cos^2 C - 2\cos C.\cos(A-B) + 1$$

$$= -2\left[\cos C + \frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2 + \frac{1}{2}\cos^2(A-B) + 1 \leq \frac{3}{2}$$

BÀI 276. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{l_b + l_c}{a} + \frac{l_c + l_a}{b} + \frac{l_a + l_b}{c} \le 3\sqrt{3}$

c) $l_a l_b l_c \le p.S.$

■ ***Hướng dẫn :***

a) Dùng bất đẳng thức Jensen hoặc bất đẳng thức Cauchy.

b và c) Dùng công thức độ dài của đường phân giác trong :

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

BÀI 277. Cho ΔABC thỏa : $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$. Chứng minh : $A \le \frac{\pi}{3}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos cho ta kết quả :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2a^2}{4bc} \ge \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \quad 0 < A \le \frac{\pi}{2}$ (vì y = cosx giảm trên $[0; \pi]$).

BÀI 278. Cho ΔABC. Chứng minh : $\frac{h_b}{h_a^2} + \frac{h_c}{h_b^2} + \frac{h_a}{h_c^2} \ge \frac{1}{r}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng bất đẳng thức : $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \ge a + b + c$

BÀI 279. Cho ΔABC vuông tại A. Chứng minh : $a^{2n} \ge b^{2n} + c^{2n}$, $\forall 1 \le n \in \mathbf{Z}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng tính nghịch biến của hàm số $y = a^x$ $(0 < a < 1)$ trên **R**.

BÀI 280. Cho ΔABC có $0 < C \le B \le A < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh :

$$\frac{2\cos 3A - 4\cos 2A + 1}{\cos A} \ge 2 \qquad (1)$$

■ ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

$$0 < C \le \frac{\pi}{3} \le A < \frac{\pi}{2} \quad \text{nên} \quad \begin{cases} \sin\frac{A}{2} \ge \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \sin A \ge \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

BÀI 281. Cho ΔABC vuông tại A, BD, CE là 2 trung tuyến của tam giác tạo thành góc nhọn α. Chứng minh : $\cos\alpha \ge 0{,}8$.

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng định lí hàm cos tính được :

$$\cos\alpha = \frac{2(b^2 + c^2)}{\sqrt{(4b^2 + c^2)(4c^2 + b^2)}} \geq \frac{4}{5} = 0,8$$

BÀI 282. Cho ΔABC có $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} = 1$. Chứng minh rằng :

a) $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1$

b) $\frac{3}{4} \leq \tan\frac{C}{2} < 1$.

■ ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng : $\tan\frac{C}{2} = 1 - \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}$

BÀI 283. Trong ΔABC, hãy chứng minh :

$$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a + b)^2 > a^3 + b^3 + c^3.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos.

BÀI 284. Cho ΔABC. Chứng minh : $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin.

BÀI 285. Chứng minh ΔABC tù $\Leftrightarrow \cos^2A + \cos^2B + \cos^2C > 1$.

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng kết quả :

$$\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C$$

BÀI 286. Cho ΔABC. Chứng minh rằng : $\sqrt{p} < \sqrt{p - a} + \sqrt{p - b} + \sqrt{p - c} \leq \sqrt{3p}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Đổi biến : $p - a = x$, $p - b = y$, $p - c = z$.

BÀI 287. Cho ΔABC nhọn. Chứng minh : $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C > 2$.

■ ***Hướng dẫn :*** Sử dụng kết quả :

$$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C$$

BÀI 288. Trong ΔABC, tìm Min(T) : $T = \frac{a.A + b.B + c.C}{a + b + c}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Áp dụng bất đẳng thức Trêbưsép.

BÀI 289. Cho ΔABC. Chứng minh rằng : $\frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}$.

Dấu "=" xảy ra khi nào ?

■ ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

$$\begin{cases} l_a = \dfrac{2}{b-a}\sqrt{bcp(p-a)} \\ h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h_a}{l_a} = \frac{(b+c)\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a\sqrt{bc}}$$

BÀI 290. Cho ΔABC. Gọi AD, BE, CF là các phân giác trong của tam giác. Chứng minh rằng : $S_{\Delta ABC} \geq 4S_{\Delta DEF}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Vận dụng tính chất đường phân giác để chứng minh :

$$S_{\Delta DEF} = S\left[1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ca}{(b+c)(b+a)} - \frac{ab}{(c+a)(c+b)}\right]$$

BÀI 291. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $h_a \leq \sqrt{p(p-a)}$ b) $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leq p^2$.

■ ***Hướng dẫn :*** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số.

BÀI 292. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $m_a \geq \sqrt{p(p-a)}$ b) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq p^2$.

■ ***Hướng dẫn :*** Áp dụng công thức trung tuyến :

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} \geq p(p-a)$$

BÀI 293. Cho ΔABC nhọn. Chứng minh rằng :

$$T_n = \frac{\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C}{\tan A + \tan B + \tan C} \geq (\sqrt{3})^{n-1}, \quad \forall n \geq 3.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C \geq 3\sqrt{3}$$

BÀI 294. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $0 < \sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ b) $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$

c) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \sqrt{3}(\cos A + \cos B + \cos C)$.

■ ***Hướng dẫn :***

a) Dùng bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương.

b) Chú ý rằng : $\cos A + \cos B + \cos C \le \cos A + 2\sin\frac{A}{2} \le \ldots \le \frac{3}{2}$

c) Dùng bất đẳng thức Trêbưsếp.

BÀI 295. Cho ΔABC. Chứng minh :

a) $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S\sqrt{3}$ b) $a^{2\alpha} + b^{2\alpha} + c^{2\alpha} \ge 3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^{\alpha}.S^{\alpha}$, $\forall \alpha > 0$.

(Bài toán mở rộng câu a)

■ ***Hướng dẫn :***

a) Dùng định lí hàm cos.

b) Dùng BĐT Cauchy và bất đẳng thức : $0 < \sin A.\sin B.\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

BÀI 296. Cho ΔABC. Chứng minh rằng : $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \ge m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ (1)

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

■ ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

$$\begin{cases} r_a = \dfrac{S}{p-a} = \sqrt{\dfrac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} \\ m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \end{cases}$$

BÀI 297. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F. Chứng minh rằng :

$$\frac{DE}{\sqrt{BC.CA}} + \frac{EF}{\sqrt{CA.AB}} + \frac{FD}{\sqrt{AB.BC}} \le \frac{3}{2}.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin, ta có :

$$\frac{EF}{\sqrt{bc}} = \frac{2(p-a)\sqrt{(p-b)(p-c)}}{bc} = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)}.\sqrt{(p-a)(p-c)}}{bc} \le \frac{1}{2}$$

BÀI 298. Cho ΔABC. Chứng minh rằng : $m_a + l_b + h_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c)$

(Bất đẳng thức Jack Garfulkel)

■ ***Hướng dẫn :*** Đặt $p - a = x$, $p - b = y$, $p - c = z$. Khi đó :

- $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} = \sqrt{\left(x + \frac{y+z}{2}\right)^2 - yz}$

$$\le \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2x + y + z - \sqrt{yz}\right)$$

- $l_b = \dfrac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)} \le \sqrt{p(p-b)} = \sqrt{y(x+y+z)}$
- $h_c \le l_c \le \sqrt{z(x+y+z)}$

BÀI 299. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

$$m_a + m_b + m_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) + \frac{|a-b| + |b-c| + |c-a|}{4}.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng kết quả bài 298.

BÀI 300. Cho ΔABC và $\begin{cases} m + n > 0 \\ n + p > 0 \\ p + m > 0 \\ mn + np + pm > 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng : $ma^2 + nb^2 + pc^2 \ge 4\sqrt{mn+np+pm}S$ (*)

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

■ ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

- $(m+p)\dfrac{a}{b} + (n+p)\dfrac{b}{a} \ge 2\sqrt{(m+p)(n+p)}$
- $\left(p\cos C + \sqrt{mn+np+pm}.\sin C\right)^2 \le p^2 + (mn+np+pm)$

$$= (m+p)(n+p)$$

BÀI 301. Cho ΔABC, trọng tâm G nằm trong đường tròn nội tiếp (I).

Chứng minh rằng : $\text{Max}\{a^2, b^2, c^2\} < 4\text{Min}\{bc, ca, ab\}$ (1)

■ ***Hướng dẫn :*** Gọi T là tiếp điểm của (I) với cạnh BC, M là trung điểm của cạnh BC. Ta có : $MT^2 < MG.MA = \dfrac{1}{3}MA^2$

BÀI 302. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}} \le 1.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski :

$$\sqrt{ac} + \sqrt{ab} \le \sqrt{a+b}.\sqrt{c+a} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \le \sqrt{(a+b)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(c+a)}} \le \frac{a}{a+\sqrt{a}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(c+a)}} \le \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

BÀI 303. Cho ΔABC. Chứng minh rằng : $\frac{h_a^2}{bc} + \frac{h_b^2}{ca} + \frac{h_c^2}{ab} \geq \frac{9r^2}{R^2}$.

- ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

• $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$

• $(h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \geq 9$

BÀI 304. Cho ΔABC nhọn. Gọi AA_1, BB_1, CC_1 là ba đường cao với H là trực tâm ΔABC. Chứng minh rằng : $a + b + c \geq 2\sqrt{3}(HA_1 + HB_1 + HC_1)$.

- ***Hướng dẫn :*** Vận dụng bất đẳng thức Trêbưsếp.

BÀI 305. Cho ΔABC nhọn có AB, BC, CA ≤ 1. Chứng minh rằng :

$$\sin\frac{A}{2}(3 - \cos A) + \sin\frac{B}{2}(3 - \cos B) + \sin\frac{C}{2}(3 - \cos C) \geq \frac{7\sqrt{3}}{2}r + 2$$

Dấu "=" xảy ra khi nào ?

- ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

$$1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C \leq \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$$

BÀI 306. Gọi I và O là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp ΔABC không đều. Chứng minh rằng : $\widehat{AIO} \leq 90^0 \Leftrightarrow 2BC \leq AB + AC$.

- ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức Euler : $IO^2 = R^2 - 2Rr$

BÀI 307. Cho ΔABC thỏa mãn $2\tan B = \tan A + \tan C$. Chứng minh rằng :

$$\cos A + \cos C \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

(Đề thi học sinh giỏi TP.HCM)

- ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

$$\tan A + \tan C = \frac{\sin(A + C)}{\cos A\cos C} = \frac{2\sin B}{\cos(A + C) + \cos(A - C)}$$

$$= \frac{2\sin B}{-\cos B + \cos(A - C)}$$

BÀI 308. Cho ΔABC có diện tích S, độ dài các cạnh là a, b, c và $n \geq 2$.

Chứng minh rằng :

$$a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \geq 3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^{n}.S^{n} + |a-b|^{2n} + |b-c|^{2n} + |c-a|^{2n} +$$

$$+ (b+c-a)^{n}|b-c|^{n} + (c+a-b)^{n}|c-a|^{n} + (a+b-c)^{n}|a-b|^{n}.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Chú ý các bất đẳng thức sau :

- $x^{m} - y^{m} \geq (x-y)^{m}, \quad \forall x > y \geq 0,\ m \geq 1$
- $\dfrac{x^{m} + y^{m} + 2^{m}}{3} \geq \left(\dfrac{x+y+2}{3}\right)^{m}, \quad \forall x, y, z \geq 0,\ m \geq 1$
- $\dfrac{x^{m} + y^{m}}{2} \geq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^{m} + \left|\dfrac{x-y}{2}\right|^{m}, \quad \forall x, y \geq 0,\ m \geq 2$

BÀI 309. Cho ΔABC đều, từ điểm M nằm trong ΔABC, kẻ MA, MB, MC cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng : $S_{\Delta DEF} \geq S_{\Delta XYZ}$.

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng công thức Euler :

$$\frac{S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{OM^{2}}{R^{2}}\right)$$ (với O là tâm của ΔABC và R = OA).

BÀI 310. Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. R_1, R_2, R_3, R lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, OCA, OAB, ABC. r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC và a, b, c tương ứng là độ dài các cạnh ΔABC. Chứng minh rằng :

$$\frac{R_1^2}{a^2} + \frac{R_2^2}{b^2} + \frac{R_3^2}{c^2} \leq \frac{R}{2r}.$$

■ ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm sin, hãy chứng minh :

$$4\frac{R_1^2}{a^2} = \frac{bc}{p(p-a)}.$$

BÀI 311. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r} \geq \dfrac{9\sqrt{3}}{2p}$. Trong đó p, R, r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp của ΔABC. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

■ ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

- $abc = 4RS = 4Rrp \quad \Rightarrow \quad p^{2} \geq \dfrac{27}{2}Rr$
- $r = \dfrac{c}{p} = \dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} \quad \Rightarrow \quad r \leq \dfrac{p}{3\sqrt{3}}$

Từ đó, ta có : $p^3 \ge \dfrac{81\sqrt{3}}{2}Rr^2$

BÀI 312. Cho $\alpha > 1$. A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$Q = \frac{(\sin A)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin B)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin C)^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(\cos\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\cos\frac{B}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\cos\frac{C}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \le 1.$$

- ***Hướng dẫn :*** Sử dụng bất đẳng thức :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha} \le \frac{a^{\alpha} + b^{\alpha}}{2}, \quad \forall a,\ b \ge 0,\ \alpha \ge 1.$$

BÀI 313. Cho ΔABC thỏa mãn hệ thức : $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chứng minh rằng : $\text{Max}\{A, B, C\} > \dfrac{2\pi}{3}$.

- ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{\sqrt{3}} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

BÀI 314. Cho ΔABC, M là trung điểm của AC. Đặt $\widehat{CBM} = \varphi$.

Chứng minh rằng : $\cot A \ge \dfrac{2\sqrt{2} - 3\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

- ***Hướng dẫn :*** Dùng định lí hàm cos ta được : $\cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S_{\Delta ABC}}$

BÀI 315. Cho ΔABC. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{IA + IB + IC}{IA.IB.IC} \ge \frac{R + r}{2Rr^2} \qquad (1)$$

- ***Hướng dẫn :*** Chú ý rằng :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right) \ge 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\sin A.\tan\frac{B}{2} + \sin B.\tan\frac{A}{2}\right) \ge 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

BÀI 316. Cho ΔABC. Chứng minh rằng : $m_a + m_b + m_c \geq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$.

- ■ ***Hướng dẫn :*** Trước hết chứng minh bất đẳng thức :

$$m_a \geq \frac{b^2 + c^2}{4R} \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad (b\cos B - C\cos C)^2 \geq 0$$

BÀI 317. Cho ΔABC không tù. Chứng minh rằng :

$$\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C \leq 3$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

- ■ ***Hướng dẫn :*** Để ý rằng :

$$\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C - 3$$

$$= 2\cos^2 A + 4\sqrt{2}\cos\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2} - 4$$

$$\leq 2\cos^2 A + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 4$$

$$\leq 2\cos A + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 4 \quad \text{(vì ΔABC không tù)}$$

$$= -4\sin^2\frac{A}{2} + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 2 = -2\left(\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 1\right)^2 \leq 0$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{B-C}{2} = 1 \\ \cos A = 0 \\ \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^o \\ B = C \end{cases}$$

LỜI GIẢI

BÀI 249.

a) Theo công thức Hêrông :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad 16S^2 &= [(b+c)+a][(b+c)-a][a-(b-c)][a+(b-c)] \\
&= [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2] \\
&= [2bc + (b^2 + c^2 - a^2)][2bc - (b^2 + c^2 - a^2)] \\
&= 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\
&= 4b^2c^2 - (b^4 + c^4 + a^4 + 2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2c^2a^2) \\
\Leftrightarrow \quad 16S^2 &= 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)
\end{aligned}$$

b) Theo BĐT Cauchy :

$$\begin{array}{rl} & 2a^2b^2 \le a^4 + b^4 \\ + & 2b^2c^2 \le b^4 + c^4 \\ & 2c^2a^2 \le c^4 + a^4 \\ \hline \end{array}$$

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \le (a^4 + b^2 + c^2) + (a^4 + b^4 + c^4)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4) \le a^4 + b^4 + c^4$$

$$\Leftrightarrow \quad 16S^2 \le a^4 + b^4 + c^4$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

BÀI 250.

a) Theo BĐT Cauchy :

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 1 + (x + y + z) + (xy + yz + zx) + xyz$$

$$\ge 1 + 2\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt[3]{(xyz)^2} + yz \ge \left(1 + \sqrt[3]{xyz}\right)^3$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = y = z$.

b) • *Cách 1 :* Theo định lí hàm cos :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos A)$$

$$\ge 2bc(1 - \cos A) \ge 4bc.\sin^2\frac{A}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} \ge \frac{2\sqrt{bc}}{a}$$

Chứng minh tương tự : $\dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}} \ge \dfrac{2\sqrt{ca}}{b}$; $\quad \dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}} \ge \dfrac{2\sqrt{ab}}{c}$

Vậy theo câu a) :

$$\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \ge \left(1 + \frac{2\sqrt{bc}}{a}\right)\left(1 + \frac{2\sqrt{ca}}{b}\right)\left(1 + \frac{2\sqrt{ab}}{c}\right)$$

$$\ge \left(1 + \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{bc}}{a}.\frac{2\sqrt{ca}}{b}.\frac{2\sqrt{ab}}{c}}\right)^3 = 27$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

• *Cách 2 :* Ta chứng minh trực tiếp không dùng câu a).

Quả vậy : Theo BĐT Cauchy : $1 + \dfrac{2\sqrt{bc}}{a} = 1 + \dfrac{\sqrt{bc}}{a} + \dfrac{\sqrt{bc}}{a} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{bc}{a^2}}$

Chứng minh tương tự : $1 + \dfrac{2\sqrt{ca}}{b} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{ca}{b^2}}$; $\quad 1 + \dfrac{2\sqrt{ab}}{c} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{ab}{c^2}}$

Nhân vế với vế các BĐT trên, ta được :

$$\left(1+\frac{2\sqrt{bc}}{a}\right)\left(1+\frac{2\sqrt{ca}}{b}\right)\left(1+\frac{2\sqrt{ab}}{c}\right) \geq 27.$$

- *Cách 3 :* Ta đã biết BĐT quen thuộc (Bạn đọc xem lời giải – bài 253)

$$0 < \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8},\text{ nên theo câu a) :}$$

$$\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \geq \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}}\right)^3 \geq \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}\right)^3 = 27$$

- *Cách 4 :* Xét : $f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{\sin x}\right),\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \ln(1+\sin x) - \ln.\sin x$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x} - \cot x$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = \frac{\sin x + \cos^2 x}{(1+\sin x).\sin^2 x} > 0$$

Vì : $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, nên theo BĐT Jensen :

$$f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \geq 3f\left(\frac{A+B+C}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left[\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right).\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right).\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)\right] \geq 3\ln 3$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \geq 27$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ A = B = C, tức là ΔABC đều.

■ **Chú ý :** $\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2...b_n}$

$\forall a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$

BĐT này có tên BĐT Minkowski. Phần chứng minh dành cho bạn đọc.

BÀI 251. Ta có : $S = pr = (p - a)r_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\Rightarrow r = \frac{S}{p}, \quad r_a = \frac{S}{p-a}$$

$$\Rightarrow r.r_a = \frac{S^2}{p(p-a)} = (p-b)(p-c) \le \left(\frac{p-b+p-c}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \text{ (BĐT Cauchy)}$$

$$\Rightarrow r.r_a \le \frac{a^2}{4}.$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

BÀI 252.

- *Cách 1 :* Ta có : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \ge 2bc - 2bc.\cos A = 4bc.\sin^2\frac{A}{2}$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}} \qquad (1)$$

Chứng minh tương tự : $\sin\frac{B}{2} \le \frac{1}{2\sqrt{ca}} \qquad (2)$

$$\sin\frac{C}{2} \le \frac{c}{2\sqrt{ab}} \qquad (3)$$

Nhân vế với vế các BĐT (1), (2) và (3), ta được :

$$\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}.\frac{b}{2\sqrt{ca}}.\frac{c}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{8}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

- *Cách 2 :*

Ta có : $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}.\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right)$

$$\le \frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{A}{2} + 1 - \sin\frac{A}{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \text{ (BĐT Cauchy)}$$

$\Rightarrow$ (đpcm).

- *Cách 3 :* (tương tự cách 2)

Ta có : $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}.\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}.\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos\frac{B-C}{2} - \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2} + \frac{1}{4}.\cos^2\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos^2\frac{B-C}{2} - \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2 \le \frac{1}{8}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2\dfrac{B-C}{2} = 1 \\ \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2}.\cos\dfrac{B-C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ A = 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow$ ΔABC đều.

(Bạn đọc tự kiểm tra lại điều này).

- *Cách 4* : Xét : $f(x) = \ln(\sin x)$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = \cot x; \qquad f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$$

Nên theo BĐT Jensen : $f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \le 3f\left(\frac{A+B+C}{6}\right)$

$\Rightarrow \ln\left(\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\right) \le 3\ln\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$ $\Rightarrow$ (đpcm).

BÀI 253.

a) BĐT $\Leftrightarrow \quad 4(x^3 + y^3) \ge (x + y)^3$

$\Leftrightarrow \quad (x + y)[4(x^2 - xy + y^2) - (x + y)^2] \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad (x + y)(3x^2 - 6xy + 3y^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad 3(x + y)(x - y)^2 \ge 0$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$

b) Theo câu a) : $\left(\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B}\right)^3 \le 4(\sin A + \sin B)$

$$\le 8\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \le 8\sin\frac{A+B}{2} \le 8\cos\frac{C}{2}$$

$\Rightarrow \quad \sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} \le 2\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow A = B$.

Chứng minh tương tự : $\sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C} \le 2\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow B = C$

$\sqrt[3]{\sin C} + \sqrt[3]{\sin A} \le 2\sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow C = A$

Vậy : $\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C} \le \sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều $\Rightarrow$ Maxp = 1 $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

■ **Chú ý :**

1. $\frac{x^n+y^n}{2} \ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, $\forall x+y \ge 0$, $\forall 2 \le n \in \mathbb{Z}$.

2. Tìm $\text{Max}p_n$, $p_n = \dfrac{\sqrt[n]{\sin A}+\sqrt[n]{\sin B}+\sqrt[n]{\sin C}}{\sqrt[n]{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt[n]{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt[n]{\cos\frac{C}{2}}}$

với A, B, C là 3 góc ΔABC và $2 \le n \in \mathbb{Z}$.

(*Đáp số :* $\text{Max}p_n = 1$). Bạn đọc tự giải.

BÀI 254.

a)• *Cách 1 :* Ta có :

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C = \frac{1}{2}(1-\cos2A)+\frac{1}{2}(1-\cos2B)+\sin^2C$$

$$= 1-\frac{1}{2}(\cos2A+\cos2B)+1-\cos^2C = 2-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2C$$

$$= 2+\cos C.\cos(A-B)-\cos^2C \le 2+\left|\cos C.\cos(A-B)\right|-\cos^2C$$

$$\le 2+\left|\cos C\right|-\cos^2C \le \frac{9}{4}-\left(\cos^2C-\left|\cos C\right|+\frac{1}{4}\right) \le \frac{9}{4}-\left(\left|\cos C\right|-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2A+\sin^2B+\sin^2C \le \frac{9}{4}$$

• *Cách 2 :* Tương tự cách 1 :

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C = 2+\cos C.\cos(A-B)-\cos^2C$$

$$= 2-\left[\cos^2C-\cos C.\cos(A-B)+\frac{1}{4}\cos^2(A-B)\right]+\frac{1}{4}\cos^2(A-B)$$

$$= 2-\left[\cos C-\frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2+\frac{1}{4}\cos^2(A-B) \le 2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

Dấu '=' $\Leftrightarrow \begin{cases}\cos C=\frac{1}{2}\cos(A-B)\\ \cos^2(A-B)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos C=\frac{1}{2}\\ A=B \quad (\text{vì } |A-B|<\pi)\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $A = B = C = 60^0$ $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

• *Cách 3 :* Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC :

Ta có : $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2 \ge 0$

$$\Leftrightarrow \quad OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 - 2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \geq -\frac{3}{2} \quad \text{(vì } \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}.$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ O ≡ G (trọng tâm ΔABC)

$\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

b)• *Cách 1*

Ta có :
$$\begin{cases} m_a^2 = \dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \\ m_b^2 = \dfrac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} \\ m_c^2 = \dfrac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow \quad (m_a + m_b + m_c)^2 \leq \frac{9}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow \quad (m_a + m_b + m_c)^2 \leq 9R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \leq 9R^2.\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \quad m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2}R$$

- *Cách 2 :* Theo cách 1 : $(m_a + m_b + m_c)^2 \leq \frac{9}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

Mặt khác : $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ (Bạn đọc xem lại bài 60)

$$\Rightarrow \quad OG^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$$

$$\Rightarrow \quad (m_a + m_b + m_c)^2 \leq \frac{9}{4}.9R^2$$

Vậy : $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2}R$ $\Rightarrow$ (đpcm).

■ **Chú ý :** Sau đây là kết qua "tốt hơn", trong ΔABC ta luôn có :

$$m_a + m_b + m_c \le 4R + r$$

(và từ BĐT quen thuộc : $r \le \dfrac{R}{2}$.

Suy ra ngay : $m_a + m_b + m_c \le 4R + \dfrac{R}{2} = \dfrac{9R}{2}$)

Bạn đọc tự chứng minh (xem như một bài tập khó).

BÀI 255.

a) Ta có : $x^n = [(x - y) + y]^n = (x - y)^n + y^n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} C_n^k (x - y)^k . y^{n-k}$

$$\ge (x - y)^n + y^n$$

$\Rightarrow \quad x^n - y^n \ge (x - y)^n$. Dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ n = 1 \end{array}\right.$

b) Theo BĐT Bernoulli :

- *Cách 1 :* (Xét $n \ge 2$, vì $n = 1$ BĐT luôn đúng)

$$\left(\frac{3x}{x + y + z}\right)^n = \left(1 + \frac{2x - y - z}{x + y + z}\right)^n \ge 1 + \frac{n(2x - y - z)}{x + y + z}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow y + z = 2x$.

Chứng minh tương tự :

$$\left(\frac{3y}{x + y + z}\right)^n \ge 1 + \frac{n(2y - z - x)}{x + y + z}. \quad \text{Dấu "="} \Leftrightarrow z + x = 2y$$

$$\left(\frac{3z}{x + y + z}\right)^n \ge 1 + \frac{n(2z - x - y)}{x + y + z}. \quad \text{Dấu "="} \Leftrightarrow x + y = 2z$$

Cộng vế với vế 3 BĐT này, ta được :

$$\left(\frac{3x}{x + y + z}\right)^n + \left(\frac{3y}{x + y + z}\right)^n + \left(\frac{3z}{x + y + z}\right)^n \ge 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^n + y^n + z^n}{3} \ge \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^n. \quad \text{Dấu "="} \Leftrightarrow x = y = z.$$

- *Cách 2 :* (Xét $n \ge 2$ vì $n = 1$ BĐT luôn đúng).

Xét : $f(t) = t^n$, $t > 0$

$f'(t) = nt^{n-1}$; $\quad f''(t) = n(n - 1)t^{n-2} > 0$

Theo BĐT Jensen :

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} \geq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \quad \text{hay :} \quad \frac{x^n+y^n+z^n}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n$$

c.i) Đặt : $\begin{cases} x = p - a > 0 \\ y = p - b > 0 \\ z = p - c > 0 \end{cases}$

Ta có : $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

$$\Leftrightarrow \quad [a^2 - (b-c)^2] + [S^2 - (c-a)^2] + [c^2 - (a-b)^2] \geq 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4yz + 4zx + 4xy \geq 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad xy + yz + zx \geq \sqrt{3(x+y+z)xyz}$$

(vì theo công thức Hêrông $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz}$)

$$\Leftrightarrow \quad (xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \quad (xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 \geq 0$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $xy = yz = zx$ $\Leftrightarrow$ $x = y = z$ $\Leftrightarrow$ $a = b = c$ $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

c.ii) Theo câu a) : $a^{2n} - (b-c)^{2n} \geq [a^2 - (b-c)^2]^n$

$$\Leftrightarrow \quad a^{2n} \geq (b-c)^{2n} + [a^2 - (b-c)^2]^n$$

(Bạn đọc lưu ý : $a^2 - (b-c)^2$, $b^2 - (c-a)^2$, $c^2 - (a-b)^2$ đều dương).

Chứng minh tương tự : $b^{2n} \geq (c-a)^{2n} + [b^2 - (c-a)^2]^n$

$c^{2n} \geq (a-b)^{2n} + [c^2 - (a-b)^2]n$

Vì vậy :

$$\begin{aligned} a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} &\geq (a-b)^{2n} + (b-c)^{2n} + (c-a)^{2n} + [a^2 - (b-c)^2]^n + \\ &\qquad + [b^2 - (c-a)^2]^n + [c^2 - (a-b)^2]^n \\ &\geq (a-b)^{2n} + (b-c)^{2n} + (c-a)^{2n} + \\ &\qquad + 3\left(\frac{a^2 - (b-c)^2 + b^2 - (c-a)^2 + c^2 - (a-b)^2}{3}\right)^n \\ &\geq (a-b)^{2n} + (b-c)^{2n} + (c-a)^{2n} + 3\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^n \end{aligned}$$

(Do câu 2), câu 3i)

Vậy : $a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \geq 3\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^n + (a-b)^{2n} + (b-c)^{2n} + (c-a)^{2n}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

- **Chú ý :** Sau một số phép biến đổi, ta có các BĐT quen thuộc sau :

1. $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S\sqrt{3}$

2. $ab + bc + ca \ge 4S\sqrt{3}$

3. $a^4 + b^4 + c^4 \ge 16S^2 \quad (n = 2)$

4. Thay điều kiện $1 \le n \in \mathbb{Z}$ bởi $1 \le n \in \mathbf{R}$ thì bài toán vẫn còn đúng.

BÀI 256.

a) Theo định lí hàm cos :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = (b^2 + c^2 - 2bc) + 2bc - 2bc.\cos A$$

$$= (b-c)^2 + 2bc(1-\cos A) = (b-c)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\sin A\right).\frac{1-\cos A}{\sin A}$$

$$= (b-c)^2 + 4S.\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}} = (b-c)^2 + 4S\tan\frac{A}{2}$$

$\Rightarrow$ (đpcm).

b)• *Cách 1 :* Xét : $f(x) = \tan x,\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\ ; \qquad f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} > 0$$

$\Rightarrow$ Theo BĐT Jensen : $f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \ge 3f\left(\frac{A+B+C}{6}\right)$

$$\Rightarrow \qquad \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge 3\tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều. $\left(\text{Bạn đọc để ý } \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$

• *Cách 2 :* Theo bài 10 : $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1$

Nên : $\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)^2 - 3$

$$= \left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)^2 - 3\left(\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{B}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\tan\frac{B}{2} - \tan\frac{C}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\tan\frac{C}{2} - \tan\frac{A}{2}\right)^2 \ge 0$$

$$\Rightarrow \left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2 \geq 3 \ \Rightarrow\ \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

c) Chứng minh tương tự (như câu a) :

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= (b-c)^2 + 4S\tan\frac{A}{2} \\ b^2 &= (c-a)^2 + 4S\tan\frac{B}{2} \\ c^2 &= (a-b)^2 + 4S\tan\frac{C}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 = 4S\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right) + (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

$$\geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \quad \text{(Do câu b)}$$

d) Theo BĐT B.C.S :

$$(a+b+c)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{q+r}}.\sqrt{q+r} + \frac{r}{\sqrt{r+p}}.\sqrt{r+p} + \frac{c}{\sqrt{p+q}}.\sqrt{p+q}\right)^2$$

$$\leq 2\left(\frac{a^2}{q+r}+\frac{b^2}{r+p}+\frac{c^2}{p+q}\right)(p+q+r)$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 \leq 2(a^2+b^2+c^2) + 2\left(\frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2 \geq \frac{a^2+b^2+c^2-[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]}{2}$$

$$\geq 2S\sqrt{3} \qquad \text{(Do câu c)}$$

Vậy : $\frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2 \geq 2S\sqrt{3}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ p=q=r \end{cases}$ (Bạn đọc tự kiểm tra dấu "=", xem như bài tập).

■ **Chú ý :**

- Qua bài 255, 256, ta có 2 cách để chứng minh bài toán :

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

- Lấy $p = q = r > 0$, ta có bài toán quen thuộc : $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}$.
- Lấy $a = b = c = 1$. Ta có BĐT Nesbit : $\frac{p}{q+r}+\frac{q}{r+p}+\frac{r}{p+q} \geq \frac{3}{2}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow p = q = r > 0$.

BÀI 257.

a) Ta có : $A + B + C = \pi \Leftrightarrow B + C = \pi - A$

$$\Rightarrow \tan(B + C) = \tan(\pi - A) \Rightarrow \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B.\tan C} = -\tan A$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$$

b)• *Cách 1 :* (Lưu ý ΔABC nhọn $\Leftrightarrow$ $\tan A, \tan B, \tan C > 0$)

Theo BĐT Cauchy :

$$p = \tan A.\tan B.\tan C = \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A.\tan B.\tan C}$$

$$\Rightarrow p \geq 3\sqrt[3]{p} \Rightarrow p^3 \geq 27p > 0 \Rightarrow p \geq 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

• *Cách 2 :* Xét : $f(x) = \tan x,\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad f''x = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} > 0$$

$\Rightarrow$ Theo BĐT Jensen : $f(A) + f(B) + f(C) \geq 3f\left(\frac{A + B + C}{6}\right)$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\tan\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$$

c)• *Cách 1 :* Theo BĐT Cauchy :

$$\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3\sqrt[3]{(\tan A.\tan B.\tan C)^n} \geq 3\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^n}$$

$$\Rightarrow \tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3(\sqrt{3})^n$$

• *Cách 2 :* Xét : $f(x) = \tan^n x,\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{n.\tan^{n-1} x}{\cos^2 x};$$

$$f''(x) = \frac{n.\tan^{n-2} x[\sin 2x.\tan x + (n - 1)]}{\cos^4 x} > 0$$

Theo BĐT Jensen : $f(A) + f(B) + f(C) \geq 3f\left(\frac{A + B + C}{6}\right)$

$$\Rightarrow \tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3\tan^n \frac{\pi}{3} = 3(\sqrt{3})^n$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

■ **Chú ý :**

- Bài toán tương tự trong ΔABC.

a) $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$

b) $\cot^n\frac{A}{2} + \cot^n\frac{B}{2} + \cot^n\frac{C}{2} \geq 3(\sqrt{3})^n$, $\forall n \geq 1$

c) $\cot^n\frac{A}{2} + \cot^n\frac{B}{2} + \cot^n\frac{C}{2} > 3\left(1 + \frac{n}{2}\right)$, $\forall n \geq 1$

Cách chứng minh dành cho bạn đọc (dùng BĐT Cauchy hoặc Jensen...)

- Qua cách chứng minh trên (cách 1 – câu 3) ta thấy :

$$\tan^nA + \tan^nB + \tan^nC \geq 3(\sqrt{3})^n,\ \forall n > 0$$

(với giả thiết ΔABC nhọn cho trước).

Không cần phải điều kiện $n \geq 1$.

BÀI 258.

a) Xét : $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - [\cos A + x(\cos B + \cos C)]$

$$= \frac{x^2}{2} - 2\cos\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}x + 1 - \cos A$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2}x + 2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\Delta' = \left(\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2}\right)^2 - \sin^2\frac{A}{2} = -\sin^2\frac{A}{2}.\sin^2\frac{B-C}{2} \leq 0$$

$\Rightarrow$ $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbf{R}$.

Vậy : $1 + \frac{x^2}{2} \geq \cos A + x(\cos B + \cos C),\ \forall x \in \mathbf{R}$.

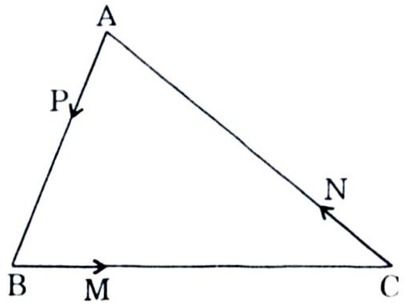
b) Theo câu a) : $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ $(x = 1)$

Mặt khác : $\begin{cases} \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A \\ \cos 3B = 4\cos^3 B - 3\cos B \\ \cos 3C = 4\cos^3 C - 3\cos C \end{cases}$ (công thức nhân 3)

$$\Rightarrow \cos 3A + \cos 3B + \cos 3C$$
$$= 4(\cos^3A + \cos^3B + \cos^3C) - 3(\cos A + \cos B + \cos C)$$
$$\geq 4(\cos^3A + \cos^3B + \cos^3C) - \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^3A + \cos^3B + \cos^3C \leq \frac{9}{8} + \frac{1}{4}(\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C)$$

BÀI 259.



- *Cách 1 :*

Chọn M, N, P lần lượt trên BC, CA, AB sao cho :

$$BM = CN = AP = \alpha$$

$$(0 < \alpha < \mathrm{Min}\{a, b, c\})$$

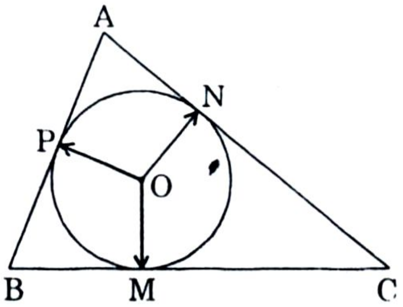
Ta có : $(x.\overrightarrow{BM} + y.\overrightarrow{CN} + z.\overrightarrow{AP})^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 + y^2 + z^2)\alpha^2 + 2(xy.\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CN} + yz.\overrightarrow{CN}.\overrightarrow{AP} + zx.\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BM}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)\alpha^2 + 2[xy\alpha^2.\cos(\pi - C) + yz\alpha^2.\cos(\pi - A) + zx\alpha^2.\cos(\pi - B)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)\alpha^2 - 2\alpha^2(xy.\cos C + yz.\cos A + 2x.\cos B) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow yz.\cos A + zx.\cos B + xy.\cos C \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$



- *Cách 2 :*

Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, ta có :

$$(x.\overrightarrow{OM} + y.\overrightarrow{ON} + z.\overrightarrow{OP}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^2 + z^2)r^2 + 2(xy.\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} + yz.\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OP} + zx.\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2[xy.\cos(\pi - C) + yz.\cos(\pi - A) + zx.\cos(\pi - B)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2(yz.\cos A + zx.\cos B + xy.\cos C) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow yz.\cos A + zx.\cos B + xy.\cos C \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$\Rightarrow$ (đpcm).

- *Cách 3 :* Xét : $f(x) = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{2} - (yz.\cos A + zx.\cos B + xy.\cos C)$

$$= \frac{x^2}{2} - (z.\cos B + y.\cos C)x + \frac{y^2 + z^2}{2} - yz.\cos A$$

$$\Delta = (z.\cos B + y.\cos C)^2 - (y^2 + z^2 - 2yz.\cos A)$$

$$= (\cos^2 B - 1)z^2 + (\cos^2 C - 1)y^2 + 2yz(\cos B.\cos C + \cos A)$$

$$= -\sin^2 Bz^2 - \sin^2 Cy^2 + 2\sin B.\sin C.yz$$

$$= -(\sin B.z - \sin C.y)^2 \leq 0 \qquad \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x$$

- *Cách 4 :*

BĐT $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2(yz.\cos A + zx.\cos B + xy.\cos C) \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2yz.\cos(B + C) - 2zx.\cos B - 2xy.\cos C \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2yz(\cos B.\cos B - \sin B.\sin C) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 B.z^2 + \sin^2 C.y^2 - 2yz.\sin B.\sin C) + (x^2 + \cos^2 B.z^2 +$$

$$+ \cos^2 C.y^2 - 2xz.\cos B - 2xy.\cos C + 2yz.\cos B.\cos C) \geq 0$$

$\Leftrightarrow (\sin B.z - \sin C.y)^2 + (x - z.\cos B - y.\cos C)^2 \geq 0$, luôn đúng.

■ Chú ý :

- Nếu $xyz > 0$, ta có (chia 2 vế BĐT trên cho xyz) :

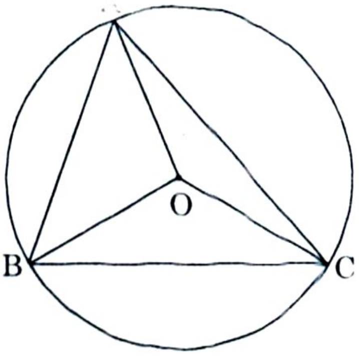
$$\frac{1}{x}\cos A + \frac{1}{y}\cos B + \frac{1}{z}\cos C \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2xyz}$$

- Chọn $x = y = z = 1$. Ta có BĐT quen thuộc : $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$
- Chọn $y = z = 1$. Ta có :

$$\cos A + x.\cos B + x.\cos C \leq \frac{x^2 + 2}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + 1 \geq \cos A + x(\cos B + \cos C)$$

Đây là kết quả bài 269 (câu 1).

BÀI 260.



- *Cách 1 :* Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có :

$$(x.\vec{OA} + y.\vec{OB} + z.\vec{OC})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)R^2 +$$

$$+ 2(xy.\vec{OA}.\vec{OB} + yz.\vec{OB}.\vec{OC} + zx.\vec{OC}.\vec{OA}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy.\cos 2C + yz.\cos 2A + zx.\cos 2B) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow yz.\cos 2A + zx.\cos 2B + xy.\cos 2C \geq -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

- *Cách 2 :* Xét : $f(x) = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + yz.\cos 2A + zx.\cos 2B + xy.\cos 2C$

$$= \frac{x^2}{2} + (z.\cos 2B + y.\cos 2C)x + \frac{y^2 + z^2}{2} + yz.\cos 2A$$

$$\Delta = (x.\cos 2B + y.\cos 2C)^2 - y^2 - z^2 - 2yz.\cos 2A$$

$$= -\sin^2 2B.z^2 - \sin^2 2C.y^2 + 2yz.\cos 2B.\cos 2C - 2yz.\cos(2B + 2C)$$

$$= -\sin^2 2B.z^2 - \sin^2 2C.y^2 + 2yz.\sin 2B.\sin 2C$$

$$= -(\sin 2B.z - \sin 2C.y)^2 \leq 0$$

$\Leftrightarrow \quad f(x) \geq 0, \forall x \quad \Rightarrow \quad$ (dpcm).

- *Cách 3 :* BĐT $\Leftrightarrow \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + yz.\cos 2A + zx.\cos 2B + xy.\cos 2B \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2[yz.\cos(2B + 2C) + zx.\cos B + xy.\cos C] \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + z^2\cos^2 2B + y^2\cos^2 2C - 2xz.\cos 2B + 2xy.\cos 2C + yz.\cos 2B.\cos 2C) +$

$+ (z^2.\sin^2 2B + y^2.\sin^2 2C - 2yz.\sin 2B.\sin 2C) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x + z.\cos 2B + y.\cos 2C)^2 + (z.\sin 2B - y\sin 2C)^2 \geq 0$, luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh.

■ **Chú ý :**

1. Thay : $\cos 2x = 1 = 2\sin^2 x$, ta có :

$$yz.\sin^2 A + zx.\sin^2 B + xy.\sin^2 C \leq \frac{1}{4}(x + y + z)^2$$

(Bạn đọc tự biến đổi) Đây là bất đẳng thức rất "đẹp".

2. Cho x = y = z = 1. Ta có hai BĐT quen thuộc :

- $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \dfrac{9}{4}$
- $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\dfrac{3}{2}$

3. Tương tự như bài 250, 260 bạn đọc chứng minh "thử" bài toán sau :

$$yz.\sin\frac{A}{2} + zx.\sin\frac{B}{2} + xy.\sin\frac{C}{2} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2},\ \forall x, y, z \in \mathbf{R}$$

(Lấy x = y = z = 1, ta thấy ngay BĐT quen thuộc :

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}).$$

BÀI 261.

- *Cách 1 :* Theo bài 2 : $\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$

Mặt khác : $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$, ta có :

$$xy + yz + zx \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{y^2 + z^2 + x^2} \quad \text{(BĐT B.C.S)}$$

$\Leftrightarrow \quad xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$

$\Leftrightarrow \quad 3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = y = z$

$\Rightarrow \quad (\cot A + \cot B + \cot C)^2 \geq 3(\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A) = 3$

$\Leftrightarrow \quad |\cot A + \cot B + \cot C| \geq \sqrt{3}$

Mặt khác : $\cot A + \cot B = \dfrac{\sin(A+B)}{\sin A.\sin B} = \dfrac{\sin C}{\sin A.\sin B} > 0$

Chứng minh tương tự : $\cot B + \cot C > 0$; $\cot C + \cot A > 0$

Vậy : $2(\cot A + \cot B + \cot C) \geq 0 \Rightarrow \cot A + \cot B + \cot C \geq 0$

$\Rightarrow T = \cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều $\Leftrightarrow$ $\text{Min}T = \sqrt{3}$.

- *Cách 2 :* Ta đã có bài toán quen thuộc :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\cot A + \cot B + \cot C) \\ a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}\text{ . Dấu "=" } \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T = \cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} \geq \sqrt{3}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều $\Rightarrow$ $\text{Min}T = \sqrt{3}$.

- *Cách 3 :* Xét : $f(x) = \cot x$, $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}; \quad f''(x) = \frac{2\cos x}{\sin^3 x} > 0$$

Xét A, B nhọn (luôn được, vì trong tam giác luôn có 2 góc nhọn).

Theo BĐT Jensen : $f(A) + f(B) \geq 2f\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad \cot A + \cot B \geq 2\cot\frac{A+B}{2} = 2\tan\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad T = \cot A + \cot B + \cot C$$

$$\geq 2\tan\frac{C}{2} + \frac{1 - \tan^2\dfrac{C}{2}}{2\tan\dfrac{C}{2}} \geq \frac{1}{2\tan\dfrac{C}{2}} + \frac{3}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{2\tan\dfrac{C}{2}}.\frac{3\tan\dfrac{C}{2}}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{Dấu "=" } \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \dfrac{1}{\tan\dfrac{C}{2}} = \dfrac{3}{2}\tan\dfrac{C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C = 60^\circ \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow$ $\text{Min}T = \sqrt{3}$.

BÀI 262.

- *Cách 1* : Từ $2\tan B = \tan A + \tan C \Rightarrow 2\tan B = \dfrac{\sin(A+C)}{\cos A.\cos C} = \dfrac{\sin B}{\cos A.\cos C}$

$\Rightarrow \quad 2\cos A.\cos C = \cos B \quad$ (vì $\sin B > 0$)

$\Rightarrow \quad \cos(A+C) + \cos(A-C) = \cos B$

$\Rightarrow \quad -\cos B + \cos(A-C) = \cos B$

$\Rightarrow \quad \cos B = \dfrac{1}{2}\cos(A-C) \le \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad B = \dfrac{\pi}{3} \quad$ (vì $0 < B < \pi$, $y = \cos B$ giảm trên $(0; \pi)$)

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} A = C \\ B = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow \text{Min}B = \dfrac{\pi}{3}$.

- *Cách 2* : Giả thiết suy ra ΔABC không vuông.

Mặt khác : $\tan A + \tan C = 2\tan B \quad \Rightarrow \quad \tan B > 0$

(vì ngược lại : $\tan B < 0 \Rightarrow \tan A + \tan C < 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \tan A < 0 \\ \tan C < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \tan A < 0 \\ \tan B < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \tan C < 0 \\ \tan B < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \Delta ABC \text{ có 2 góc tù (vô lí))}$$

Vậy $\tan B > 0$, nên : $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$

$\Rightarrow \quad 3\tan B = \tan A.\tan B.\tan C$

$\Rightarrow \quad 3 = \tan A.\tan C \le \left(\dfrac{\tan A + \tan C}{2}\right)^2 = \tan^2 B \quad$ (BĐT Cauchy)

$\Rightarrow \quad \tan B \ge \sqrt{3} \Rightarrow B \ge \dfrac{\pi}{3} \quad$ (vì $y = \tan x$ tăng trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$)

$\Rightarrow \quad \text{Min}B = \dfrac{\pi}{3}$ khi ΔABC đều.

BÀI 263. Theo bài 7 : $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4.\cos A.\cos B.\cos C$

Nên : $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos A.\cos B.\cos C \le 0$

$\Rightarrow \quad \Delta ABC$ không nhọn

Nên không giảm tính tổng quát, ta có thể xem :

$$\frac{\pi}{2} \le A < \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} \le \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Hàm số y = cosx giảm trên $(0; \pi)$ $\Rightarrow$ $\cos\frac{\pi}{4} \geq \cos\frac{A}{2}$ $\Rightarrow$ $\cos\frac{A}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C = \sin A + 2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= \sin A + 2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\leq 1 + 2.\frac{1}{\sqrt{2}}.1 = 1 + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \leq 1 + \sqrt{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC vuông cân.

BÀI 264. $\forall a, b \geq 0$, ta có :

$$\frac{a^3+b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(a+b)[4(a^2-ab+b^2) - (a+b)^2]$$

$$= \frac{1}{8}(a+b)(3a^2 - 6ab + 3b^2) = \frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$ Dấu "=" $\Leftrightarrow$ a = b

Vậy : $\left(\sqrt[3]{\sin 2A} + \sqrt[3]{\sin 2B}\right)^3 \leq 4(\sin 2A + \sin 2B)$

$$\leq 8\sin(A+B)\cos(A-B) \leq 8\sin C$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\sin 2A} + \sqrt[3]{\sin 2B} \leq 2\sqrt[3]{\sin C}$$

Chứng minh tương tự : $\sqrt[3]{\sin 2B} + \sqrt[3]{\sin 2C} \leq 2\sqrt[3]{\sin A}$

$$\sqrt[3]{\sin 2C} + \sqrt[3]{\sin 2A} \leq 2\sqrt[3]{\sin B}$$

Vậy : $\sqrt[3]{\sin 2A} + \sqrt[3]{\sin 2B} + \sqrt[3]{\sin 2C} \leq \sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

- **Chú ý :** Bài toán tổng quát (dành cho bạn đọc).

"Trong mọi ΔABC nhọn và $2 \leq n \in \mathbb{Z}$ thì :

$$\sqrt[n]{\sin 2A} + \sqrt[n]{\sin 2B} + \sqrt[n]{\sin 2C} \leq \sqrt[n]{\sin A} + \sqrt[n]{\sin B} + \sqrt[n]{\sin C}$$ ".

BÀI 265.

Theo bài 256 (câu b) : $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

và bài 10 : $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1$

Nên : $\left(1+\tan\frac{A}{2}\right)\left(1+\tan\frac{B}{2}\right)\left(1+\tan\frac{C}{2}\right) = 1 + \left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right) +$

$$+ \left(\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}\right) + \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}$$

$$\ge 1+\sqrt{3}+1+\frac{r}{p-a}.\frac{r}{p-b}.\frac{r}{p-c} \ge 2+\sqrt{3}+\frac{\left(\frac{S}{p}\right)^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\ge 2+\sqrt{3}+\frac{S^3}{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow \left(1+\tan\frac{A}{2}\right)\left(1+\tan\frac{B}{2}\right)\left(1+\tan\frac{C}{2}\right) \ge 2+\sqrt{3}+\frac{S}{p^2}$$

(vì $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$)

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

BÀI 266.

- *Cách 1 :* Theo bài 8 :

$$2 + 2\cos A.\cos B.\cos C = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 C + \sqrt{\sin C} \le 2$$

$\Rightarrow \quad 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C \le 2 \quad \Rightarrow \quad \cos A.\cos B.\cos C \le 0$

$\Rightarrow \quad \cos C \le 0$ (vì $\cos A, \cos B > 0$) (1)

Mặt khác, cũng từ BĐT :

$0 < \sin C \le 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\sin C} \ge \sin^2 C \quad \Rightarrow \quad \sin^2 A + \sin^2 B \ge \sin^2 C$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \ge \left(\frac{c}{2R}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 \ge c^2$$

$\Rightarrow a^2 + b^2 \ge c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C \Rightarrow \cos C \ge 0$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \quad \cos C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$ (đpcm).

- *Cách 2 :* Xét 3 trường hợp :

+ $0 < C < \frac{\pi}{2}$: Ta có : $0 < A, B < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow |A - B| < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos(A - B) > 0$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\sin C} = \sin^2 A + \sin^2 B = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2B)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) = 1 - \cos(A + B).\cos(A - B)$$

$$= 1 + \cos C.\cos(A - B) > 1$$

$\Rightarrow \quad \sin C > 1 \quad \Rightarrow$ vô lí.

+ $\frac{\pi}{2} < C < \pi \quad \Rightarrow \quad \cos C < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab} < 0$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 < c^2 \quad \Rightarrow \quad (2R\sin A)^2 + (2R\sin B)^2 < (2R\sin C)^2$

$\Rightarrow \quad \sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\sin C} < \sin^2 C$

$\Rightarrow \quad 0 < \sin C < \sin^4 C \quad \Rightarrow \quad \sin C > 1 \quad \Rightarrow$ vô lí.

+ $C = \frac{\pi}{2} \left(A + B = \frac{\pi}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad \sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 A + \cos^2 A = 1 = \sqrt{\sin C}$

Vậy ΔABC vuông tại C.

■ **Chú ý :** Ta có bài toán tổng quát (bài 210, 266) :

"ΔABC vuông tại C $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 A + \sin^2 B = (\sin C)^\alpha \\ 0 < A,\ B < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ (với $0 < \alpha < 2$)".

BÀI 267.

- *Cách 1 :* ΔABC nhọn, nên : $\cos A, \cos B, \cos C > 0$

$\Rightarrow \quad 0 < \cos C = -\cos(A + B) = \sin A.\sin B - \cos A.\cos B < \sin A.\sin B$

$\Rightarrow \quad \cos^2 C < \sin^2 A.\sin^2 B$

Chứng minh tương tự : $\cos^2 B < \sin^2 C.\sin^2 A$

$\cos^2 A < \sin^2 B.\sin^2 C$

Suy ra : $(2 - \cos^2 A)(2 - \cos^2 B)(2 - \cos^2 C) =$

$= (1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C)$

$= 1 + (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + (\sin A.\sin B)^2 + (\sin B.\sin C)^2 +$

$+ (\sin C.\sin A)^2 + (\sin A.\sin B.\sin C)^2$

$< 1 + (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) \geq 4$

Vậy : $(2 - \cos^2 A)(2 - \cos^2 B)(2 - \cos^2 C) > 4$.

- *Cách 2 :* ΔABC nhọn $\Rightarrow \cos A.\cos B.\cos C > 0$

Nên : $(2 - \cos^2 A)(2 - \cos^2 B)(2 - \cos^2 C)$

$= 1 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \sin^2 A.\sin^2 B + \sin^2 B.\sin^2 C +$

$+ \sin^2 C.\sin^2 A + \sin^2 A.\sin^2 B.\sin^2 C$

$> 1 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B) +$

$+ (1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 C) + (1 - \cos^2 C)(1 - \cos^2 A)$

$\geq 4 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) +$

$+ \cos^2 A.\cos^2 B + \cos^2 B.\cos^2 C + \cos^2 C.\cos^2 A$

$\geq -2 + 3(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + \cos^2 A.\cos^2 B + \cos^2 B.\cos^2 C +$

$+ \cos^2 C.\cos^2 A$

$> -2 + 3(2 + 2\cos A.\cos B.\cos C) > 4$

Vậy : $(2 - \cos^2 A)(2 - \cos^2 B)(2 - \cos^2 C) > 4$.

BÀI 268.

- *Cách 1 : Chứng minh :* $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$ (BĐT Nesbit)

+ $(a + b) + (b + c) + (c + a) \ge 3\sqrt[3]{(a + b)(b + c)(c + a)}$

$$a + b + c \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a + b)(b + c)(c + a)}$$

+ $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{(a + b)(b + c)(c + a)}}$

$\Rightarrow (a + b + c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \ge \frac{9}{2}$

$\Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) - 3$

$$= (a + b + c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) - 3 \ge \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$

Chứng minh : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

Không giảm tính tổng quát, ta xem $a \le b \le c$ và trong ΔABC luôn có : $c < a + b$.

Nên : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{a}{b+a} + \frac{b}{b+a} + \frac{c}{c} = 2$

- *Cách 2 :* Ta có : $\frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$ (1)

(Ta thấy (1) $\Leftrightarrow$ $a + b + c < 2(b + c)$

$\Leftrightarrow$ $a < b + c$, đúng vì đây là BĐT tam giác)

Chứng minh tương tự : $\frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}$

$$\frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}$$

Vậy : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2$

+ Đặt : $\begin{cases} 2x = b + c > 0 \\ 2y = c + a > 0 \\ 2z = a + b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = y + z - x \\ b = z + x - y \\ c = x + y - z \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)-\frac{3}{2}$$

$$\geq \frac{1}{2}.2+\frac{1}{2}.2+\frac{1}{2}.2-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $x = y = z$ $\Leftrightarrow$ $a = b = c$

Vậy bài toán được chứng minh.

BÀI 269.

- **Chú ý :** Bài 269 là một "ý lớn" của bài 203.

- *Cách 1 :* Do : $A, B, C \in (0; \pi)$ $\Rightarrow$ $\frac{A}{4}, \frac{B}{4}, \frac{C}{4} \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{4}, \tan\frac{B}{4}, \tan\frac{C}{4} \in (0; 1) \quad \Rightarrow \quad x^3 = \tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4} \in (0; 1)$$

Mặt khác : $A + B + C = \pi$ $\Rightarrow$ $\frac{A}{4}+\frac{B}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4}$

$$\tan\left(\frac{A}{4}+\frac{B}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4}\right) \Rightarrow \frac{\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}}{1-\tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}}=\frac{1-\tan\frac{C}{4}}{1+\tan\frac{C}{4}}$$

$$\Rightarrow \left(\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}\right)\left(1+\tan\frac{C}{4}\right)=\left(1-\tan\frac{C}{4}\right)\left(1-\tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{C}{4}.\tan\frac{A}{4}=$$

$$=1+\tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4}$$

$\Rightarrow$ Theo BĐT Cauchy :

$$1+x^3=\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4}}+3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4}\right)^2} \geq 3x+3x^2$$

$\Leftrightarrow$ $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $(x+1)(x-2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3}) \geq 0$

Vì : $0 < x < 1$, nên : $x \leq 2-\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $T = x^3 \leq (2-\sqrt{3})^3$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \tan\frac{A}{4} = \tan\frac{B}{4} = \tan\frac{C}{4} = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Vậy : $\text{MaxT} = (2 - \sqrt{3})^3$.

- *Cách 2* : Xét : $f(x) = \ln(\tan x),\ x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2}{\sin 2x} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{-4\cos 2x}{\sin^2 2x} < 0$$

$\Rightarrow$ Theo BĐT Jensen : $f\left(\frac{A}{4}\right) + f\left(\frac{B}{4}\right) + f\left(\frac{C}{4}\right) \le 3f\left(\frac{A+B+C}{12}\right)f$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4}\right) \le 3\ln.\tan\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \quad T \le \left(\tan\frac{\pi}{12}\right)^3 = (2 - \sqrt{3})^3$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Vậy : $\text{MaxT} = (2 - \sqrt{3})^3$.

Chú ý : • Tại sao : $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ (?!)

Thật vậy : $\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}.\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)^2 = 2 - \sqrt{3}$$

Hoặc tính $\tan\frac{\pi}{12}$ dựa theo công thức hạ bậc :

$$\tan^2\frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{1 + \cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = (2 - \sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$

- Mời bạn đọc làm bài toán tổng quát hơn :

"Cho ΔABC, tìm $\text{Max}(T_n)$ với : $T_n = \tan\frac{A}{n}.\tan\frac{B}{n}.\tan\frac{C}{n}$

(với $2 \le n$ là hằng số)".

BÀI 270. Kẻ AH ⊥ BC tại H.

Ta có : $3a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 3a^2 + 2(AH^2 + HC^2) + 2(AH^2 + BH^2)$

$= 3a^2 + 4AH^2 + 2(BH^2 + HC^2)$

$= 3a^2 + 4AH^2 + (BH + HC^2) + (BH - HC)^2$

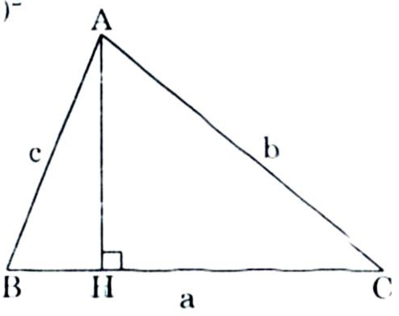
$\geq 3a^2 + 4AH^2 + (BH + HC)^2$

$\geq 3a^2 + 4AH^2 + a^2$

$\geq 4(a^2 + AH^2)$

$\geq 4.2.a.AH \geq 16S$ (BĐT Cauchy)

Vậy : $16S \leq 3a^2 + 2b^2 + 2c^2$.



■ **Chú ý :**

- Bài 270 cũng có thể giải cách khác như sau :

BĐT đã cho ⇔ $16S \leq 3(b^2 + c^2 - 2bc.\cos A) + 2(b^2 + c^2)$

(Định lí hàm cos)

⇔ $8bc.\sin A \leq 5(b^2 + c^2) - 6bc.\cos A$

⇔ $f(b) = 5b^2 - 2(4\sin A + 3\cos A)cb + 5c^2 \geq 0$

Có : $\Delta' = (4\sin A + 3\cos A)^2c^2 - 25c^2$

$= [(4\sin A + 3\cos A)^2 - 25]c^2 \leq 0$, luôn đúng

Vì theo BĐT B.C.S : $(4\sin A + 3\cos A)^2 \leq (4^2 + 3^2)(\sin^2 A + \cos^2 A)$

⇔ $(4\sin A + 3\cos A)^2 \leq 25$

⇒ $f(b) \geq 0, \forall b$ ⇒ (đpcm).

- Sau đây là bài toán tổng quát (rất khó), bạn đọc làm "thử" :

"Cho ΔABC. Với x, y, z thỏa điều kiện : $\sqrt{x + y}$, $\sqrt{y + z}$, $\sqrt{z + x}$ có nghĩa và là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó.

Chứng minh rằng : $xa^2 + yb^2 + zc^2 \geq 4\sqrt{xy + yz + zx}\,.S$"

BÀI 271. Do : $0 < C \leq B < A \leq \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \sin C \leq \sin B < \sin A \leq 1 \\ 1 > \cos C \geq \cos B > \cos A \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \sin C.\cos(A - B) = \sin(A + B).\cos(A - B) = \dfrac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B)$

$= \sin A.\cos A + \sin B.\cos B \geq \sin C.\cos A + \sin C.\cos B$

$\geq \sin C(\cos A + \cos B)$

$\Rightarrow \cos(A - B) \geq \cos A + \cos B$

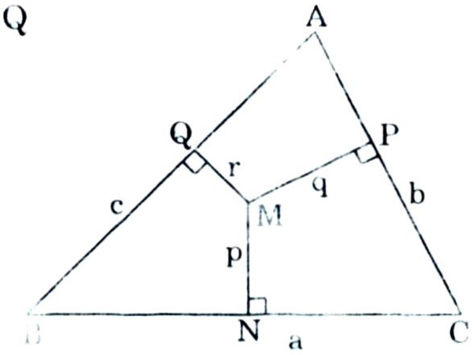
Dấu "=" ⇔ $\begin{cases} B = C \\ A = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow 4M = 4\cos\frac{A-B}{2}.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2} = 2\cos\frac{A-B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\cos^2\frac{A-B}{2} - 2\cos\frac{A-B}{2}.\cos\frac{A+B}{2}$$

$$4M = 1 + \cos(A-B) - (\cos A + \cos B) \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad \text{Min}(M) = \frac{1}{4} \text{ khi } \Delta ABC \text{ vuông cân tại A.}$$



BÀI 272. Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ có AM là đường kính, nên :

$$\frac{PQ}{\sin\widehat{PMQ}} = MA \quad \Rightarrow \quad PQ = MA.\sin A$$

$$\Rightarrow \quad PQ = MA.\sin A$$

Mặt khác : Xét ΔMPQ :

$$p\alpha^2 = q^2 + r^2 - 2qr.\cos(\pi - A)$$

$$= q^2 + r^2 - 2qr.\cos(B + C)$$

$$= q^2 + r^2 - 2qr(\cos B.\cos C - \sin B.\sin C)$$

$$= [(q\cos C)^2 + (r\cos B)^2 - 2qr.\cos B.\cos C] +$$

$$+ [(q\sin C)^2 + (r\sin B)^2 + 2qr.\sin B.\sin C]$$

$$= (q\cos C - r\cos B)^2 + (q\sin C + r\sin B)^2 \geq (q\sin C + r\sin B)^2$$

$$\Rightarrow \quad PQ \geq q\sin C + r\sin B$$

$$\Rightarrow \quad MA.\sin A \geq q\sin C + r\sin B$$

$$\Rightarrow \quad MA \geq q.\frac{\sin C}{\sin A} + r.\frac{\sin B}{\sin A} = q\frac{c}{a} + r\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \quad MA \geq q.\frac{c}{a} + r.\frac{b}{a}$$ (Do định lí hàm sin)

Chứng minh tương tự : $MB \geq r.\frac{a}{b} + p.\frac{c}{b}$; $\quad MC \geq p.\frac{b}{c} + q.\frac{a}{c}$

$$\Rightarrow \quad MA + MB + MC \geq p\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + q\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + r\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

$$\geq p.2 + q.2 + r.2$$

$$\Rightarrow \quad MA + MB + MC \geq 2(p + q + r) \quad \Rightarrow \quad \text{(đpcm).}$$

BÀI 273.

a)• *Cách 1 :* Theo định lí hàm cos :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \geq 2bc - 2bc.\cos A \geq 4bc.\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} \ge \frac{4bc}{a^2}$$

Chứng minh tương tự : $\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} \ge \frac{4ca}{b^2}$; $\quad \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \ge \frac{4ab}{c^2}$

Vậy : $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \ge 4\left(\frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}\right)$

$$\ge 4.3\sqrt[3]{\frac{bc.ca.ab}{a^2.b^2.c^2}} = 12 \quad \text{(Do BĐT Cauchy)}$$

- *Cách 2 :* Ta đã biết BĐT quen thuộc : $0 < \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$

Do đó theo BĐT Cauchy :

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{\left(\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\right)^2}} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2}} = 12$$

- *Cách 3 :* Xét : $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^3 x}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = \frac{1 + 2\cos^2 x}{\sin^4 x} > 0$$

Theo BĐT Jensen : $f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \ge 3f\left(\frac{A+B+C}{6}\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \ge \frac{3}{\sin^2\frac{\pi}{6}} = 12 \quad (\text{vì} : A + B + C = \pi)$$

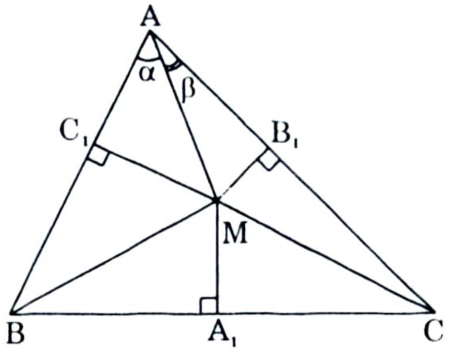
- *Cách 4 :* Ta có : $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} = 3 + \left(\cot^2\frac{A}{2} + \cot^2\frac{B}{2} + \cot^2\frac{C}{2}\right)$

$$\ge 3 + 9 = 12$$

(Bạn đọc xem lại bài 257)

b) **Đặt :** $\widehat{MAB} = \alpha > 0$

$\widehat{MAC} = \beta > 0 \quad (\alpha + \beta = A)$



Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác AB_1MC_1 đường kính AM, ta có :

$$MA = \frac{MB_1}{\sin\beta} = \frac{MC_1}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{MB_1 + MC_1}{MA} = \frac{MB_1}{MA} + \frac{MC_1}{MA}$$

$$= \sin\beta + \sin\alpha$$

$$= 2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}.\cos\frac{\beta-\alpha}{2} \le 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{MA}{MB_1 + MC_1} \ge \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}$$

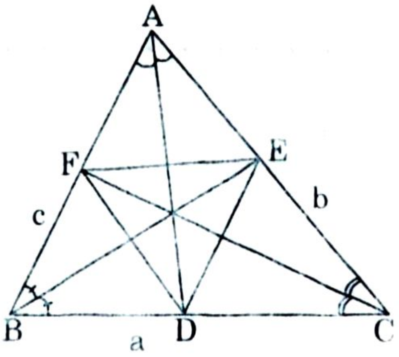
Chứng minh tương tự : $\dfrac{MB}{MC_1 + MA_1} \ge \dfrac{1}{2\sin\frac{B}{2}}$; $\dfrac{MC}{MA_1 + MB_1} \ge \dfrac{1}{2\sin\frac{C}{2}}$

Vậy : $\left(\dfrac{MA}{MB_1 + MC_1}\right)^2 + \left(\dfrac{MB}{MC_1 + MA_1}\right)^2 + \left(\dfrac{MC}{MA_1 + MB_1}\right)^2 \ge$

$$\ge \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\right) \ge \frac{1}{4}.12 = 3$$

Dấu '=' ⇔ ΔABC đều và M là tâm tam giác.

BÀI 274. Theo tính chất đường phân giác :



$$\frac{BF}{AF} = \frac{CB}{CA} \quad \Rightarrow \frac{BF}{AF} + 1 = \frac{CB}{CA} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{c}{AF} = \frac{a+b}{b} \quad \Rightarrow AF = \frac{bc}{a+b}$$

Chứng minh tương tự : $AE = \dfrac{bc}{c+a}$

Do đó :

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2AF.AF.\cos A$$

$$= \left(\frac{bc}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 - 2\frac{(bc)^2}{(a+b)(c+a)}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \left(\frac{bc}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 - \frac{(b^2+c^2-a^2)bc}{(a+b)(c+a)}$$

$$EF^2 = \frac{a^2bc}{(a+b)(c+a)} + \frac{(bc)^2(a+b)^2 + (bc)^2(c+a)^2}{(a+b)^2(c+a)^2} - \frac{(b^2+c^2)bc}{(a+b).(c+a)}$$

$$= \frac{a^2bc}{(a+b)(c+a)} + \frac{bc[(b^2+c^2)(a+b)(c+a) - bc(a+b)^2 - bc(c+a)^2]}{(a+b)^2.(c+a)^2}$$

Mặt khác : $(b^2 + c^2)(a + b)(c + a) - bc(a + b)^2 - bc(c + a)^2$

$$= (b^2 + c^2)(ac + a^2 + bc + ab) - bc(2a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ca)$$

$$= (b^2 + c^2)ac + (b^2 + c^2)a^2 + (b^2 + c^2)ab - 2abc(a + b + c)$$

$$= (b^2 + c^2)a(c + a + b) - 2abc(a + b + c)$$

$$= a(a + b + c)(b^2 + c^2 - 2bc) \ge 0$$

$$= a(a + b + c)(b - c)^2 \ge 0$$

Vậy theo (1), suy ra :

$$EF^2 \le \frac{a^2bc}{(a+b)(c+a)} \le \frac{a^2bc}{2\sqrt{ab}.2\sqrt{ca}} = \frac{a\sqrt{bc}}{4} \quad \text{(Do BĐT Cauchy 2 số)}$$

$$\Rightarrow 2EF \le \sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{b}.\sqrt[4]{c} \le \frac{a+a+b+c}{4} = \frac{2a+b+c}{4} \quad \text{(Do BĐT Cauchy 4 số)}$$

$$\Rightarrow EF \le \frac{2a+b+c}{8}$$

Chứng minh tương tự : $FD \le \dfrac{2b+c+a}{8}$; $\quad DE \le \dfrac{2c+a+b}{8}$

Vậy : $EF + FD + DE \le \dfrac{1}{2}(a + b + c) \quad \Leftrightarrow \quad p(DEF) \le \dfrac{1}{2}p(ABC)$.

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

BÀI 275.

a)• *Cách 1* : Áp dụng BĐT Cauchy : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{xyz}} > 0$

$$x + y + z \ge 3\sqrt[3]{xyz} > 0$$

Vậy : $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)(x + y + z) \ge 9 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \ge \dfrac{9}{x+y+z}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $x = y = z$.

Cách 2 : BĐT $\Leftrightarrow \quad (x + y + z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \ge 9$

$$\Leftrightarrow \quad 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \ge 9$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} - 2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(y-z)^2}{yz} + \frac{(z-x)^2}{zx} \geq 0 \text{ luôn đúng.}$$

- *Cách 3 :* Theo BĐT B.C.S :

$$9 = \left(\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y}.\frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z}.\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 \leq (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

Vậy : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}$.

b) Ta có : $0 < (2 + \cos 2A) + (2 + \cos 2B) + (2 - \cos 2C)$

$$\begin{aligned}
&= 6 + (\cos 2A + \cos 2B) - \cos 2C \\
&= 6 + 2\cos(A + B).\cos(A - B) - \cos 2C \\
&= 6 - 2\cos C.\cos(A - B) + 1 - 2\cos^2 C \\
&= 7 - 2\left[\cos^2 C + \cos C.\cos(A - B) + \frac{1}{4}\cos^2(A - B)\right] + \frac{1}{4}\cos^2(A - B) \\
&= 7 - 2\left[\cos C + \frac{1}{2}\cos(A - B)\right]^2 + \frac{1}{2}\cos^2(A - B) \leq 7 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2(A - B) = 1 \\ \cos C = -\frac{1}{2}\cos(A - B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \quad (\text{vì } |A - B| < \pi) \\ C = 120^\circ \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = B = 30^\circ \\ C = 120^\circ \end{cases}$$

Vậy : $p \geq \dfrac{9}{(2 + \cos 2A) + (2 + \cos 2B) + (2 - \cos 2C)} \geq \dfrac{9}{\frac{15}{2}} = \dfrac{6}{5}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} A = B = 30^\circ \\ C = 120^\circ \\ 2 + \cos 2A = 2 + \cos 2B = 2 - \cos 2C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = 30^\circ \\ C = 120^\circ \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \text{Minp} = \frac{6}{5}.$$

BÀI 276.

a)• *Cách 1 :* Xét $f(x) = \cos x,\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

$\Rightarrow \quad f''(x) = -\cos x < 0$

$\Rightarrow$ Theo BĐT Jensen : $f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \le 3f\left(\frac{A+B+C}{6}\right)$

$$\Rightarrow \quad \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le 3\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Dấu "=" $\Rightarrow$ ΔABC đều.

- *Cách 2 :* Ta đã có BĐT quen thuộc : $1 < \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

Theo BĐT B.C.S :

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \sqrt{3\left(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right)}$$

$$\le \sqrt{\frac{3}{2}(3 + \cos A + \cos B + \cos C)} \le \sqrt{\frac{3}{2}\left(3 + \frac{3}{2}\right)} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

b) Ta có : $\begin{cases} l_a = \dfrac{2bc}{b+c}.\cos\dfrac{A}{2} \\ l_b = \dfrac{2ca}{c+a}.\cos\dfrac{B}{2} \\ l_c = \dfrac{2ab}{a+b}.\cos\dfrac{C}{2} \end{cases}$

Suy ra : $\frac{l_b + l_c}{a} + \frac{l_c + l_a}{b} + \frac{l_a + l_b}{c}$

$$= \frac{2c\cos\frac{B}{2}}{c+a} + \frac{2b\cos\frac{C}{2}}{a+b} + \frac{2a\cos\frac{C}{2}}{a+b} + \frac{2c\cos\frac{A}{2}}{b+c} + \frac{2b\cos\frac{A}{2}}{b+c} + \frac{2a\cos\frac{B}{2}}{c+a}$$

$$= 2\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right) \le 2.\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

c) Ta có : $l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bc.p(p-a)} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)} \le \sqrt{p(p-a)}$

(vì theo BĐT Cauchy : $2\sqrt{bc} \le b + c$)

Chứng minh tương tự : $l_b \le \sqrt{p(p-b)}$; $\quad l_c \le \sqrt{p(p-c)}$

Vậy : $\quad l_a l_b l_c \le p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p.S.$

BÀI 277.

- *Cách 1 :* Theo định lí hàm sin :

$$\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 = 2\left(\frac{a}{2R}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 = 2a^2$$

Lúc đó : $2a^2 = b^2 + c^2 \geq 2bc$ (BĐT Cauchy)

$$\Rightarrow \quad a^2 \geq bc$$

$$\Rightarrow \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2}{2bc} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos A \geq \cos\frac{\pi}{3}$$

$\Rightarrow \quad A \leq \dfrac{\pi}{3}$ (vì $y = \cos x$ giảm trên $[0; \pi]$)

- *Cách 2 :* Ta có :

$$0 < \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2B) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2C - \sin^2 A)$$

$$= \cos^2 A - \frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C)$$

$$= \cos^2 A - \cos(B + C).\cos(B - C) = \cos^2 A + \cos A.\cos(B - C)$$

$$= \cos A[\cos(B - C) - \cos(B + C)] = 2\cos A.\sin B.\sin C$$

$$\Rightarrow \quad \cos A > 0$$

Khi đó : $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$

$$\Leftrightarrow \quad 2(1 - \cos^2 A) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2B) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2C)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(1 - \cos^2 A) = 1 - \frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C)$$

$$= 1 + \cos A.\cos(B - C) \leq 1 + \cos A$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos^2 A + \cos A - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos A \geq \dfrac{1}{2} \\ \cos A \leq -1 \text{ (loại, vì } \cos A > -1) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \cos A \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A \leq \frac{\pi}{3}.$$

BÀI 278.

- *Cách 1 :* Ta có : $S = pr = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

Theo BĐT Cauchy :

$$\frac{h_b}{h_a^2} + \frac{h_c}{h_b^2} = \frac{\frac{2S}{b}}{\left(\frac{2S}{a}\right)^2} + \frac{\frac{2S}{c}}{\left(\frac{2S}{b}\right)^2} = \frac{1}{2S}\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c}\right)$$

$$= \frac{1}{2S}\left[\left(\frac{a^2}{b} + b\right) + \left(\frac{b^2}{c} + c\right) - (b + c)\right] \geq \frac{1}{2S}[(2a) + (2b) - (b + c)]$$

$$= \frac{1}{2S}(2a + b - c) \qquad (1)$$

Chứng minh tương tự : $\frac{h_c}{h_b^2} + \frac{h_a}{h_c^2} \geq \frac{1}{2S}(2b + c - a) \qquad (2)$

$$\frac{h_a}{h_c^2} + \frac{h_b}{h_a^2} \geq \frac{1}{2S}(2c + a - b) \qquad (3)$$

Cộng vế với vế các BĐT (1), (2), (3) với nhau, ta được :

$$2 \text{ vế trái} \geq \frac{1}{2S}(2a + 2b + 2c) \geq \frac{2p}{S} = \frac{2}{r}$$

Vậy : vế trái $\geq \frac{1}{r}$.

- *Cách 2 :* BĐT đã cho $\Leftrightarrow \frac{\frac{2S}{b}}{\left(\frac{2S}{a}\right)^2} + \frac{\frac{2S}{c}}{\left(\frac{2S}{b}\right)^2} + \frac{\frac{2S}{a}}{\left(\frac{2S}{c}\right)^2} \geq \frac{p}{S}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c \qquad (4)$$

Áp dụng BĐT B.C.S :

$$(a + b + c)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{b}}.\sqrt{b} + \frac{b}{\sqrt{c}}.\sqrt{c} + \frac{c}{\sqrt{a}}.\sqrt{a}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)(b + c + a)$$

Vậy : $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c \Rightarrow$ (4) đúng

$\Rightarrow$ (đpcm).

BÀI 279.

- *Cách 1 :* Ta đã biết hàm số mũ : $y = a^x$ $(0 < a < 1)$ là hàm giảm.

Nên : $0 < b, c < a \Rightarrow 0 < \frac{b}{a}, \frac{c}{a} < 1 \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \le \left(\frac{b}{a}\right)^{2} \\ \left(\frac{c}{a}\right)^{2n} \le \left(\frac{c}{a}\right)^{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} + \left(\frac{c}{a}\right)^{2n} \le \left(\frac{b}{a}\right)^{2} + \left(\frac{c}{a}\right)^{2} = 1 \Rightarrow b^{2n} + c^{2n} \le a^{2n}.$$

- *Cách 2 :* Ta luôn có : $0 < \sin B, \cos B < 1$

$$\Rightarrow 0 < \sin^{\alpha} B, \cos^{\alpha} B \le 1, \forall \alpha \ge 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 B(1 - \sin^{2n-2} B) + \cos^2 B(1 - \cos^{2n-2} B) \ge 0$$

$$\Rightarrow \sin^{2n} B + \cos^{2n} B \le \sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} + \left(\frac{c}{a}\right)^{2n} \le 1 \Rightarrow b^{2n} + c^{2n} \le a^{2n}.$$

- *Cách 3 :* Ta dùng phương pháp quy nạp :

+ $n = 1$: $a^2 \ge b^2 + c^2$ BĐT luôn đúng.

+ $n = k$: Giả sử BĐT đúng, tức là : $a^{2k} \ge b^{2k} + c^{2k}$.

+ $n = k + 1$: $a^{2(k+1)} = a^{2k}.a^2 \ge (b^{2k} + c^{2k})(b^2 + c^2)$

$$\ge b^{2(k+1)} + c^{2(k+1)} + b^{2k}.c^2 + b^2.c^{2k} \ge b^{2(k+1)} + c^{2(k+1)}$$

$$\Rightarrow a^{2(k+1)} \ge b^{2(k+1)} + c^{2(k+1)}, \text{ đúng}$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp, ta có : $a^{2n} \ge b^{2n} + c^{2n}$, $\forall 1 \le n \in \mathbf{Z}$.

BÀI 280. Giả thiết suy ra $\cos A > 0$, nên :

$$(1) \Leftrightarrow 2\cos 3A - 4\cos 2A + 1 \ge 2\cos A$$

$$\Leftrightarrow 1 \ge 2(\cos A - \cos 3A) + 4\cos 2A$$

$$\Leftrightarrow 1 \ge 4\sin 2A.\sin A + 4\cos 2A \Leftrightarrow \frac{1}{4} \ge \sin 2A.\sin A + \cos 2A$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \ge 2\sin^2 A.\cos A + 1 - 2\sin^2 A$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A(1 - \cos A) \ge \frac{3}{8} \Leftrightarrow 2\sin^2 \frac{A}{2}.\sin^2 A \ge \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2}.\sin A \ge \frac{\sqrt{3}}{4}$$

BĐT cuối đúng vì : $\begin{cases} A + B + C = \pi \\ 0 < C \le \dfrac{\pi}{3} \le A < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\dfrac{A}{2} \ge \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \\ \sin A \ge \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

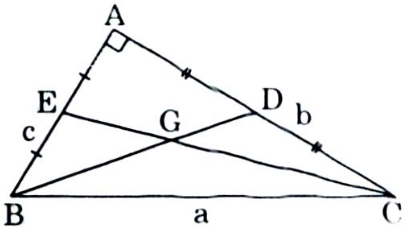
(Để ý : y = sinx tăng trên $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$) $\Rightarrow \quad \sin\dfrac{A}{2}.\sin A \ge \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Vậy bài toán được chứng minh.

BÀI 281. Ta có : $CE = \sqrt{b^2 + \dfrac{c^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4b^2 + c^2}$

$$BD = \sqrt{c^2 + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4c^2 + b^2}$$

$$BG = \frac{2}{3}BD\ ,\ GE = \frac{1}{3}CE$$



(Nên theo định lí hàm cos trong ΔBGE) :

$$BE^2 = BG^2 + EG^2 - 2BG.EG.\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{BG^2 + EG^2 - BE^2}{2BG.EG} = \frac{\frac{1}{9}(4c^2 + b^2) + \frac{1}{36}(4b^2 + c^2) - \frac{c^2}{4}}{2BG.EG}$$

$$= \frac{16c^2 + 4b^2 + 4b^2 + c^2 - 9c^2}{72BG.EG} = \frac{8(b^2 + c^2)}{4\sqrt{(4b^2 + c^2)(4c^2 + b^2)}}$$

$$= \frac{2(b^2 + c^2)}{\sqrt{(4b^2 + c^2)(4c^2 + b^2)}} \ge \frac{2(b^2 + c^2)}{\dfrac{4b^2 + c^2 + 4c^2 + b^2}{2}} \ge \frac{4}{5}$$

Vậy : $\quad \cos\alpha \ge \dfrac{4}{5}.$

■ **Chú ý :** Chúng ta có thể giải cách khác, như sau :

Ta có : $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{DB} = CE.DB.\cos\alpha$

Mà : $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{DB} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB})$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AB} + CB^2)$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AB} + CB^2) = \frac{1}{4}(CA^2 + AB^2 + CB^2) = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2}{2} = (\cos\alpha)CE.DB \le (\cos\alpha)\frac{CE^2 + DB^2}{2} \quad \text{(BĐT Cauchy)}$$

$$\le \cos\alpha.\frac{5}{8} = a^2$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha \ge \frac{4}{5}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC vuông cân tại A.

BÀI 282.

a) Ta có : $A + B + C = \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$

$$\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}}{1 - \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}} = \cot\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)\tan\frac{A}{2} = 1 - \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1.$$

b) • Theo câu a) :

$$\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\underbrace{\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right)}_{1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tan\frac{C}{2} = 1 - \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} < 1.$$

• Hơn nữa áp dụng BĐT Cauchy :

$$1 = \tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} \le \tan\frac{C}{2} + \left(\frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{2}\right)^2 = \tan\frac{C}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{C}{2} \ge \frac{3}{4}$$

Vậy : $\frac{3}{4} \le \tan\frac{C}{2} < 1.$

BÀI 283.

- *Cách 1 :* Xét hiệu :

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a+b)^2 - (a^3 + b^3 + c^3)$$

$$= a[(b-c)^2 - a^2] + b[(c-a)^2 - b^2] + c[(a+b)^2 - c^2]$$

$$= a(b-c+a)(b-c-a) + b(c-a+b)(c-a-b) + c(a+b-c)(a+b+c)$$

$$= (a+b-c)[a(b-c-a) - b(c-a+b) + c(a+b+c)]$$

$$= (a+b-c)(ab - ac - a^2 - bc + ab - b^2 + ca + bc + c^2)$$

$$= (a+b+c)[c^2 - (a^2 + b^2 - 2ab)]$$

$$= (a+b-c)[c^2 - (a-b)^2]$$

$$= (a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) > 0$$

luôn đúng vì trong ΔABC : $\begin{cases} b + c > a \\ c + a > b \\ a + b > c \end{cases}$

- *Cách 2 :*

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a+b)^2 > a^3 + b^3 + c^3$$

$$\Leftrightarrow \quad a(b^2 + c^2 - 2bc) + b(c^2 + a^2 - 2ca) + c(a^2 + b^2 + 2ab) > a^3 + b^3 + c^3$$

$$\Leftrightarrow \quad a(a^2 + 2bc.\cos A - 2bc) + b(2ca.\cos B + b^2 - 2ca) + \\ + c(c^2 + 2ab.\cos C + 2ab) > a^3 + b^3 + c^3$$

$$\Leftrightarrow \quad 2abc(\cos A + \cos B + \cos C) > 2abc$$

$\Leftrightarrow \quad \cos A + \cos B + \cos C > 1$, luôn đúng.

(vì : $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$)

BÀI 284.

Theo định lí hàm sin : $a + b + c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$

Xét : $f(x) = \sin x,\ x \in (0; \pi) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\sin x < 0$

Theo BĐT Jensen : $f(A) + f(B) + f(C) \le 3f\left(\dfrac{A+B+C}{3}\right)$

$$\Rightarrow \quad \sin A + \sin B + \sin C \le 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a + b + c \le 3\sqrt{3}R$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

BÀI 285. Ta đã biết : $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C$

Do đó : ΔABC tù $\Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C < 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C > 1$

$\Leftrightarrow \cos^2A + \cos^2B + \cos^2C > 1.$

BÀI 286.

Đặt : $\begin{cases}\sqrt{p-a} = x > 0\\ \sqrt{p-b} = y > 0\\ \sqrt{p-c} = z > 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p - a = x^2\\ p - b = y^2\\ p - c = z^2\end{cases} \Rightarrow \quad p = x^2 + y^2 + z^2$

BĐT cần chứng minh $\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+z^2} < x + y + z & (1)\\ x + y + z \le \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} & (2)\end{cases}$

- $(1) \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 < (x + y + z)^2$

  $\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 < x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

  $\Leftrightarrow \quad 2(xy + yz + zx) > 0$, luôn đúng.

- $(2) \Leftrightarrow \quad (x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$

  $\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$

  $\Leftrightarrow \quad 2(xy + yz + zx) \le 2(x^2 + y^2 + z^2)$

  $\Leftrightarrow \quad 0 \le (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$, luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh.

BÀI 287. Ta đã biết đẳng thức quen thuộc trong tam giác :

$$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C$$

Do ΔABC nhọn $\Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C > 0$

$\Leftrightarrow 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C > 2$

$\Leftrightarrow \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C > 2$

$\Rightarrow$ (đpcm).

■ **Chú ý :** Cách làm bài 285 và 287 chỉ là "một" nhờ mối quan hệ mật thiết của các góc (trong ΔABC) :

- $\begin{cases}\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C\\ \cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C\end{cases}$
- ΔABC nhọn $\Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C > 0$
- ΔABC tù $\Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos C < 0$

- ΔABC vuông $\Leftrightarrow$ $\cos A.\cos B.\cos C = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos A = 0 \\ \cos B = 0 \\ \cos C = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{\pi}{2} \\ B = \dfrac{\pi}{2} \\ C = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

(Các bạn để ý trong một tam giác, góc tù hoặc góc vuông (nếu có) chỉ một góc mà thôi).

BÀI 288.

- *Cách 1 :* Không giảm tính tổng quát, ta xem : $a \geq b \geq c \Rightarrow A \geq B \geq C$

Vậy : $\begin{cases} a \geq b \geq c \\ A \geq B \geq C \end{cases}$

Theo BĐT Trêbưsep : $\dfrac{a + b + c}{3} \cdot \dfrac{A + B + C}{3} \leq \dfrac{a.A + b.B + c.C}{3}$

$\Rightarrow \quad (a + b + c)\pi \leq 3(aA + bB + cC) \quad$ (vì : $A + B + C = \pi$)

$\Rightarrow \quad T \geq \dfrac{\pi}{3}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = c \\ A = B = C \end{array}\right. \Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Vậy : $\text{MinT} = \dfrac{\pi}{3}$.

- *Cách 2 :* Ta luôn có : $\begin{cases} (a - b)(A - B) \geq 0 \\ (b - c)(B - C) \geq 0 \\ (c - a)(C - A) \geq 0 \end{cases}$ (Bạn đọc tự kiểm tra)

Suy ra : $T - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{aA + bB + cC}{a + b + c} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{aA + bB + cC}{a + b + c} - \dfrac{A + B + C}{3}$

$$= \frac{3(a.A + b.B + c.C) - (a + b + c)(A + B + C)}{3(a + b + c)}$$

$$= \frac{[2(a.A + b.B + c.C) - (a.B + a.C + b.A + b.C + c.A + c.B)]}{3(a + b + c)}$$

$$= \frac{[(a.A + b.B - a.B - b.A) + (b.B + c.C - b.C - c.B) + (c.C + a.A - c.A + a.C)]}{3(a + b + c)}$$

$$= \frac{(a - b)(A - B) + (b - c)(B - C) + (c - a)(C - A)}{3(a + b + c)} \geq 0$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Vậy : $\mathrm{Min}T = \frac{\pi}{3}$.

BÀI 289. Ta có : $l_a = \dfrac{2b.\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bc.p(p-a)}$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

Suy ra : $\dfrac{h_a}{l_a} = \dfrac{(b+c)\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a\sqrt{bc}}$

Chứng minh tương tự :

$$\frac{h_b}{l_b} = \frac{(c+a)\sqrt{(p-c)(p-a)}}{b\sqrt{ca}} \;;\qquad \frac{h_c}{l_c} = \frac{(a+b)\sqrt{(p-a)(p-b)}}{c\sqrt{ab}}$$

Áp dụng BĐT Cauchy :

$$\frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)(p-a)(p-b)(p-c)}{(abc)^2}}$$

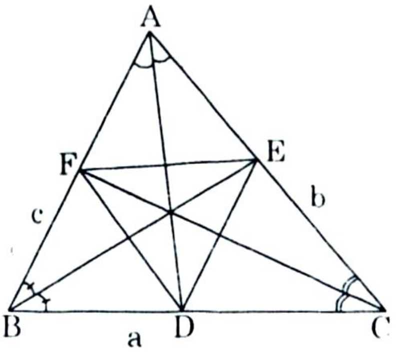
$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}}{(abc)^2}\cdot\frac{S^2}{p}}$$

$$= 3\sqrt[3]{\frac{8S^2}{pabc}} = 3\sqrt[3]{2\left(\frac{S}{p}\right)\left(\frac{4S}{abc}\right)} \geq 3\sqrt[3]{2r\left(\frac{1}{R}\right)}$$

Vậy : $\dfrac{h_a}{l_a} + \dfrac{h_b}{l_b} + \dfrac{h_c}{l_c} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{2r}{R}}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

BÀI 290. Theo tính chất đường phân giác :



$$\frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} \quad\Rightarrow\quad \frac{BF}{AF} + 1 = \frac{BC}{AC} + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c}{AF} = \frac{a+b}{b} \quad\Rightarrow\quad AF = \frac{bc}{a+b}$$

Tính tương tự : $AE = \dfrac{bc}{c+a}$

$$\Rightarrow \quad S_{\Delta AEF} = \frac{1}{2}AE.EF.\sin A = \frac{1}{2}(bc.\sin A)\frac{bc}{(a+b)(c+a)} = \frac{S.bc}{(a+b)(c+a)}$$

Chứng minh tương tự :

$$S_{\Delta BDF} = \frac{S.ca}{(b+c)(a+b)}\,; \qquad S_{\Delta CDE} = \frac{S.ab}{(b+c)(c+a)}$$

$$\Rightarrow \quad S_{\Delta DEF} = S - (S_{\Delta AEF} + S_{\Delta BDF} + S_{\Delta CDE})$$

$$= S\left[1 - \frac{bc}{(a+b)(c+a)} - \frac{ca}{(b+c)(a+b)} - \frac{ab}{(b+c)(c+a)}\right]$$

Ta sẽ chứng minh : $1 - \frac{bc}{(a+b)(c+a)} - \frac{ca}{(b+c)(a+b)} - \frac{ab}{(b+c)(c+a)} \le \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{bc}{(a+b)(c+a)} + \frac{ca}{(b+c)(a+b)} + \frac{ab}{(b+c)(c+a)} \ge \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4[bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)] \ge 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4[bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)] \ge 3[2abc + ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)]$$

$$\Leftrightarrow \quad bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) \ge 6abc$$

$$\Leftrightarrow \quad a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) \ge 6abc$$

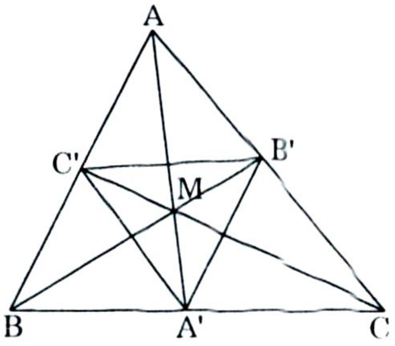
$$\Leftrightarrow \quad a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \ge 0$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ a = b = c

Vậy : $S_{\Delta DEF} \le \frac{1}{4}S$. Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

- **Chú ý :** Ta có bài toán tổng quát (cho bài 290), như sau :

"Cho M nằm trong ΔABC. AM, BM, CM lần lượt cắt BC, CA, AB tại A', B', C'. Ta luôn có : $S_{\Delta A'B'C'} \le \frac{1}{4}S_{\Delta ABC}$"



(Đây là bài khá khó, bạn đọc làm "thử")

BÀI 291.

a)• *Cách 1 :* Áp dụng BĐT Cauchy :

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{p(p-a)}.2\sqrt{(p-b)(p-c)} \le \frac{1}{a}\sqrt{p(p-a)}.(p-a+p-c)$$

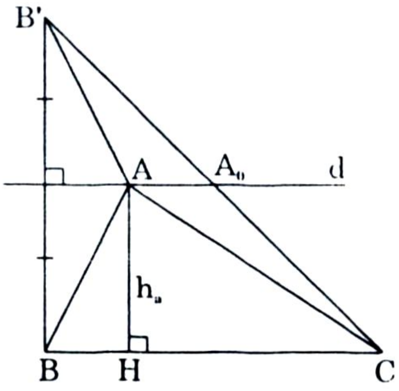
$$\le \frac{1}{a}\sqrt{p(p-a)}.a \le \sqrt{p(p-a)}$$

$\Rightarrow \quad h_a \le \sqrt{p(p-a)}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow$ b = c.

- *Cách 2 :* Gọi d là đường thẳng qua A và song song BC.

B' là điểm đối xứng của B qua d.

Ta có : $AB + AC = AB' + AC \geq B'C$



$\Leftrightarrow \quad b + c \geq \sqrt{a^2 + 4h_a^2}$

$\Leftrightarrow \quad (b + c)^2 \geq a^2 + 4h_a^2$

$\Leftrightarrow \quad (b + c)^2 - a^2 \geq 4h_a^2$

$\Leftrightarrow \quad 4p(p - a) \geq 4h_a^2$

$\Leftrightarrow \quad h_a \leq \sqrt{p(p - a)}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $A \equiv A_0$ $\Leftrightarrow$ ΔABC cân tại A.

b) Theo câu a) :

$$\begin{array}{rl} & h_a^2 \leq p(p - a) \\ + & h_b^2 \leq p(p - b) \\ & h_c^2 \leq p(p - c) \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow \quad h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leq p(p - a + p - b + p - c) = p^2$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

■ **Chú ý :** Trong ΔABC, ta luôn có các bất đẳng thức đẹp sau :

1. $\begin{cases} l_a \leq \sqrt{p(p - a)} \\ l_b \leq \sqrt{p(p - b)} \\ l_c \leq \sqrt{p(p - c)} \end{cases}$ 2. $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq p^2$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

BÀI 292.

a) Ta có : $m_a^2 = \dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \dfrac{(b^2 + c^2 - a^2) + (b^2 + c^2)}{4}$

$\geq \dfrac{(b^2 + c^2 - a^2) + 2bc}{4}$ (BĐT Cauchy)

$\Leftrightarrow \quad m_a^2 \geq \dfrac{(b + c)^2 - a^2}{4} = p(p - a)$

$\Rightarrow \quad m_a \geq \sqrt{p(p - a)}$.

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $b = c$.

b) Theo câu a) : $\begin{cases} m_a^2 \geq p(p-a) \\ m_b^2 \geq p(p-b) \\ m_c^2 \geq p(p-c) \end{cases}$

Vậy : $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq p(p-a+p-b+p-c) = p^2$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

BÀI 293. ΔABC nhọn, nên :

$$\begin{cases} \tan A, \tan B, \tan C > 0 \\ T = \tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C \end{cases}$$

Áp dụng BĐT Cauchy :

$$T = \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A.\tan B.\tan C}$$

$$\Rightarrow \quad T \geq 3\sqrt[3]{T} \quad \Rightarrow \quad T^3 \geq 27T \quad \Rightarrow \quad T \geq 3\sqrt{3}$$

(Thực ra phần chứng minh $T \geq 3\sqrt{3}$ đã được bài 257 (câu b) giới thiệu rồi)

Do đó theo BĐT Cauchy (lần nữa) :

$$T_n = \frac{\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C}{\tan A.\tan B.\tan C} \geq \frac{3\sqrt[3]{(\tan A.\tan B.\tan C)^n}}{\tan A.\tan B.\tan C}$$

$$\Rightarrow \quad T_n \geq 3\sqrt[3]{(\tan A.\tan B.\tan C)^{n-3}} \geq 3\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^{n-3}}$$

$$\Rightarrow \quad T_n \geq (\sqrt{3})^{n-1}.$$ Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

- **Chú ý :** Bài toán tương tự (đúng cho mọi ΔABC) :

$$\frac{\cot^n\frac{A}{2} + \cot^n\frac{B}{2} + \cot^n\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}} \geq (\sqrt{3})^{n-1}, \ \forall n \geq 3.$$

BÀI 294.

- **Chú ý :** Bạn đọc xem lại bài 209, 258, 259, 284 để hiểu rõ câu a), b) hơn. Ở đây chúng tôi trình bày theo cách nữa.

a) Ta có : $0 < \sin A + \sin B + \sin C = \sin A + 2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}$

$$\leq \sin A + 2\sin\frac{B+C}{2} \leq \sin A + 2\cos\frac{A}{2}$$

$$\leq 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2} + 2\cos\frac{A}{2} \leq 2\cos\frac{A}{2}\left(1 + \sin\frac{A}{2}\right) \quad (*)$$

Đặt : $t = \sin\frac{A}{2} \in (0; 1)$

Xét : $f(t) = \left[\cos\frac{A}{2}\left(1 + \sin\frac{A}{2}\right)\right]^2 = (1 - t^2)(1 + t)^2 = (1 + t)(1 + t)^3$

- *Cách 1 :* Áp dụng BĐT Cauchy (4 số) :

$$3f(t) = (3 - 3t).(1 + t)(1 + t)(1 + t)$$

$$\leq \left[\frac{(3 - 3t) + (1 + t) + (1 + t) + (1 + t)}{4}\right]^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$\Rightarrow \quad f(t) \leq \frac{27}{16} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{f(t)} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Cùng với (*) suy ra : $0 < \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

- *Cách 2 :* $f(t) = (1 - t)(1 + t)^3$

$$f'(t) = -(1 + t)^3 + 3(1 - t)(1 + t)^2 = 2(1 + t)^2(1 - 2t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2} \text{ (vì } t \in (0; 1))$$

Bảng biến thiên :

t	0		$\frac{1}{2}$		1
f'		+	0	−	
f		↗	$\frac{27}{16}$	↘	

Vậy : $f(t) \leq \frac{27}{16}$ (tiếp tục như cách 1).

b) - Ta có : $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} > 1$

(vì $A, B, C \in (0; \pi) \Rightarrow \sin\frac{A}{2}, \sin\frac{B}{2}, \sin\frac{C}{2} > 0$)

- $\cos A + \cos B + \cos C = \cos A + 2\cos\frac{B + C}{2}.\cos\frac{B - C}{2}$

$$= \cos A + 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B - C}{2}$$

$$\leq \cos A + 2\sin\frac{A}{2} \leq 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}$$

$$\le f(t) = -2t^2 + 2t + 1,\ t = \sin\frac{A}{2} \in (0;\ 1)$$

$$f'(t) = -4t + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên :

t	0		$\frac{1}{2}$		1
f'		+	0	–	
f	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1

Vậy : $f(t) \le \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

c) Không giảm tính tổng quát, ta xem :

$$a \le b \le c \quad \Leftrightarrow \quad \sin A \le \sin B \le \sin C \text{ (định lí hàm sin)}$$

Vì $y = \cos x$ giảm trên $[0;\ \pi]$, nên :

$$a \le b \le c \quad \Leftrightarrow \quad 0 < A \le B \le C < \pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A \ge \cos B \ge \cos C$$

Vậy : $\begin{cases} \sin A \le \sin B \le \sin C \\ \cos A \ge \cos B \ge \cos C \end{cases}$

Do đó theo BĐT Trêbưsép, ta có :

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \cdot \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \ge$$

$$\ge \frac{\sin A.\cos A + \sin B.\cos B + \sin C.\cos C}{3}$$

$$\Rightarrow \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \le \frac{2}{3}(\sin A + \sin B + \sin C)(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$\le \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}(\cos A + \cos B + \cos C)$$

Vì : $\begin{cases} \sin A + \sin B + \sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2} & \text{(câu a)} \\ \cos A + \cos B + \cos C > 0 & \text{(câu b)} \end{cases}$

Vậy : $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \le \sqrt{3}(\cos A + \cos B + \cos C)$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

BÀI 295.

- **Chú ý :** Bạn đọc xem bài 255, 256

a) • *Cách 1 :* Theo BĐT Cauchy :

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \le p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow \quad S^2 \le \frac{p^4}{27} \quad \Rightarrow \quad 3\sqrt{3}S \le p^2 = \frac{1}{4}(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \quad 12\sqrt{3}S \le (a+b+c)^2$$

Ta có : $(a+b+c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2) - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2$

$$\le 3(a^2+b^2+c^2)$$

(hoặc có thể dùng BĐT B.C.S chứng minh trực tiếp :

$$(a+b+c)^2 = (1.a+1.b+1.c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2))$$

Vậy : $12\sqrt{3}S \le 3(a^2+b^2+c^2) \quad \Leftrightarrow \quad 4S\sqrt{3} \le a^2+b^2+c^2$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

• *Cách 2 :* Theo định lí hàm cos : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

Nên : $\quad a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \quad 2(b^2+c^2) - 2bc.\cos A \ge 4S\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}bc.\sin A\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 - bc(\cos A + \sqrt{3}\sin A) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 - 2bc.\cos\left(A - \frac{\pi}{3}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f\left(\frac{b}{c}\right) = \left(\frac{b}{c}\right)^2 - 2\cos\left(A - \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{b}{c}\right) + 1 \ge 0, \text{ luôn đúng}$$

Vì : $\Delta' = \cos^2\left(A - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\sin^2\left(A - \frac{\pi}{3}\right) \le 0 \quad \Rightarrow \quad$ (đpcm).

b) Theo BĐT Cauchy :

$$a^{2\alpha} + b^{2\alpha} + c^{2\alpha} \ge 3\sqrt[3]{(abc)^{2\alpha}} = 3\sqrt[3]{(8R^3\sin A.\sin B.\sin C)^{2\alpha}}$$

$$\ge \frac{3\left(\frac{8R^2}{\sqrt{3}}\sin A.\sin B.\sin C\right)^{\alpha}}{\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\sin A.\sin B.\sin C\right)^{\frac{\alpha}{3}}} \ge \frac{3\left(\frac{8R^2}{\sqrt{3}}\sin A.\sin B.\sin C\right)^{\alpha}}{1}$$

$$\geq 3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}(2R\sin B).(2R\sin C).\sin A\right)^{\alpha}$$

$$\geq 3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}bc.\sin A\right)^{\alpha} \geq 3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)^{\alpha}$$

(Bạn đọc lưu ý : $0 < \sin A.\sin B.\sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{8}{3\sqrt{3}}\sin A.\sin B.\sin C \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\sin A.\sin B.\sin C\right)^{\frac{\alpha}{3}} \leq 1)$$

Vậy : $a^{2\alpha} + b^{2\alpha} + c^{2\alpha} \geq 3\left(\dfrac{4S}{\sqrt{3}}\right)^{\alpha}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} a^{2\alpha} = b^{2\alpha} = c^{2\alpha} \\ \dfrac{8}{3\sqrt{3}}\sin A.\sin B.\sin C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ ΔABC đều.

(Bạn đọc tự kiểm tra lại dấu "=")

■ **Chú ý :** Ta có : $0 < \sin A.\sin B.\sin C$

$$\leq \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Hoặc chứng minh trực tiếp nhờ BĐT Jensen

(Xét hàm số $f(x) = \ln(\sin x)$, $x \in (0; \pi)$).

BÀI 296.

Ta có : $\begin{cases} S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = (p-a)r_a \\ m_a^2 = \dfrac{1}{4}[2(b^2+c^2) - a^2] \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_a = \sqrt{\dfrac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} \\ m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2) \end{cases}$$

Do đó :

$$(1) \Leftrightarrow p\left[\frac{(p-b)(p-c)}{p-a} + \frac{(p-c)(p-a)}{p-b} + \frac{(p-a)(p-b)}{p-c}\right] \geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right) \geq \frac{3}{4}[(y + z)^2 + (z + x)^2 + (x + y)^2] \qquad (2)$$

$$\left(\text{Trong đó : } \begin{cases} x = p - a > 0 \\ y = p - b > 0 \\ z = p - c > 0 \end{cases}\right)$$

Để ý rằng : $(x + y + z)\left(\dfrac{yz}{x} + \dfrac{zx}{y} + \dfrac{xy}{z}\right) =$

$$= xy + yz + zx + x^2\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + y^2\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + z^2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

$$\geq xy + yz + zx + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$$

$$\geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)$$

$$\geq \frac{3}{4}[(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2]$$

$\Rightarrow$ (2) đúng.

Dấu "=" ở (1) $\Leftrightarrow$ $x = y = z$ $\Leftrightarrow$ $a = b = c$ $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

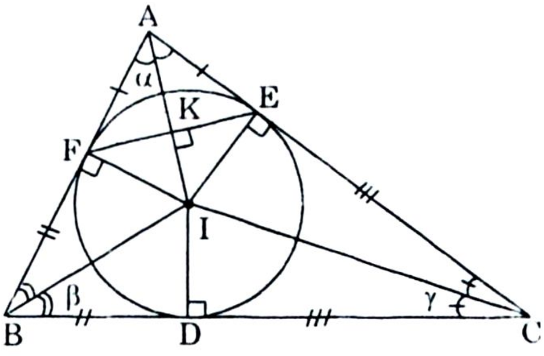
BÀI 297. Ta có : $EF = 2FK = 2(p - a)\sin\alpha = 2(p - a)\sqrt{\dfrac{(p - b)(p - c)}{bc}}$

$$\Rightarrow \frac{EF}{\sqrt{bc}} = \frac{2(p - a)\sqrt{(p - b)(p - c)}}{bc} = \frac{2\sqrt{(p - a)(p - b)}\sqrt{(p - a)(p - c)}}{bc}$$

$$\leq \frac{2\dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{b}{2}}{bc} = \frac{1}{2}$$

Chứng minh tương tự : $\dfrac{DE}{\sqrt{ab}} \leq \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{FD}{\sqrt{ca}} \leq \dfrac{1}{2}$



Vậy : $\dfrac{DE}{\sqrt{ab}} + \dfrac{EF}{\sqrt{bc}} + \dfrac{FD}{\sqrt{ca}} \leq \dfrac{3}{2}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

BÀI 298.

Đặt : $\begin{cases} x = p - a > 0 \\ y = p - b > 0 \\ z = p - c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = a \\ z + x = b \\ x + y = c \end{cases}$

Khi đó : $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(z + x)^2 + 2(x + y)^2 - (y + z)^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 4x(y + z) + y^2 - 2yz + z^2} = \sqrt{\left(x + \frac{y + z}{2}\right)^2 - yz}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3\left(x + \frac{y + z}{2} - \sqrt{yz}\right)\left(x + \frac{y + z}{2} + \sqrt{yz}\right)}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{3\left(x + \frac{y + z}{2} - \sqrt{yz}\right) + \left(x + \frac{y + z}{2} + \sqrt{yz}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(2x + y + z - \sqrt{yz})$$

Ta đã biết : $l_b = \dfrac{2\sqrt{ac}}{a + c}\sqrt{p(p - b)} \leq \sqrt{p(p - b)} = \sqrt{y(x + y + z)}$

$$l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a + b}\sqrt{p(p - c)} \leq \sqrt{p(p - c)} = \sqrt{z(x + y + z)}$$

$$\Rightarrow m_a + l_b + l_c \leq \frac{2x + y + z - \sqrt{yz}}{\sqrt{3}} + \sqrt{x + y + z}(\sqrt{y} + \sqrt{z})$$

$$\leq \frac{2x + y + z - \sqrt{yz}}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x + y + z}\,\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{y} + \sqrt{z})$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left[2x + y + z - \sqrt{yz} + x + y + z + \frac{3}{4}(\sqrt{y} + \sqrt{z})^2\right]$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left[3x + 2y + 2z - \sqrt{yz} + \frac{3}{4}(y + z + 2\sqrt{yz})\right]$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left[3(x + y + z) - \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2}{4}\right]$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}}3(x + y + z) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c)$$

$$\Rightarrow m_a + l_b + l_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) \qquad (*)$$

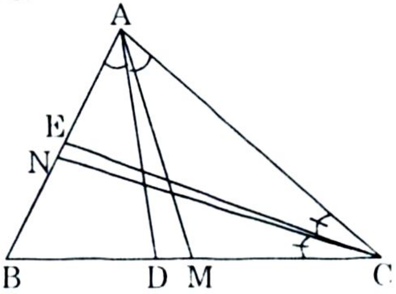
$$\Rightarrow m_a + l_b + h_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) \quad (\text{vì } h_c \le l_c)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Chú ý : Để ý rằng : $l_a \le m_a$, nên từ (*) ta có ngay bất đẳng thức sau :

$$l_a + l_b + l_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c).$$

BÀI 299. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c$.



Gọi :

- AD, CE lần lượt là các đường phân giác trong xuất phát từ A và C.
- AM, CN lần lượt là các đường trung tuyến xuất phát từ A và C.

Dễ thấy rằng :

$$MD = MB - BD = \frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)} \le \frac{b-c}{2}$$

$$NE = NA - AE = \frac{c}{2} - \frac{bc}{a+b} = \frac{c(a-b)}{2(a+b)} \le \frac{a-b}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_a = AM \le AD + MD \le l_a + \dfrac{b-c}{2} \\ m_c = CN \le AE + NE \le l_c + \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad m_a + m_b + m_c \le l_a + m_b + l_c + \frac{a-b}{2} + \frac{b-c}{2}$$

$$\le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) + \frac{(a-b)+(b-c)+(a-c)}{2}$$

(Do kết quả bài 298)

Vậy bài toán đã được chứng minh.

BÀI 300. Giả sử C nhọn.

BĐT (*) $\Leftrightarrow ma^2 + nb^2 + p(a^2 + b^2 - 2ab\cos C) \ge 2\sqrt{mn + np + pm}\, ab\sin C$

$$\Leftrightarrow (m+p)\frac{a}{b} + (n+p)\frac{b}{a} \ge 2(p\cos C + \sqrt{mn+np+pm}\,\sin C) \quad (**)$$

Theo bất đẳng thức Côsi và Bunhiacopski, ta có :

$$(m+p)\frac{a}{b}+(n+p)\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{(m+p)(n+p)}$$

và $$\left(p\cos C+\sqrt{mn+np+pm}\,\sin C\right)^2\le p^2+(mn+np+pm)$$

$$\le (m+p)(n+p)$$

$\Rightarrow$ (*) đúng và có dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}(m+p)\dfrac{a}{b}=(n+p)\dfrac{b}{a}\\[2mm] \dfrac{\cos C}{p}=\dfrac{\sin C}{\sqrt{mn+np+pm}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{n+p}}=\dfrac{b}{\sqrt{p+m}}\\[2mm] \dfrac{\cos^2 C}{p^2}=\dfrac{\sin^2 C}{mn+np+pm}=\dfrac{1}{(m+p)(n+p)}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{a}{\sqrt{n+p}}=\frac{b}{\sqrt{p+m}}=\frac{c}{\sqrt{m+n}}$$

$$\left(\text{vì } c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+\frac{p+m}{n+p}a^2-2a^2\sqrt{\frac{p+m}{n+p}}\cdot\frac{p}{\sqrt{(m+p)(n+p)}}\right.$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\frac{c}{a}\right)^2=\frac{n+p+p+m-2p}{n+p}=\frac{n+m}{n+p}$$

$$\left.\Leftrightarrow\ \frac{a}{\sqrt{n+p}}=\frac{c}{\sqrt{m+n}}\right)$$

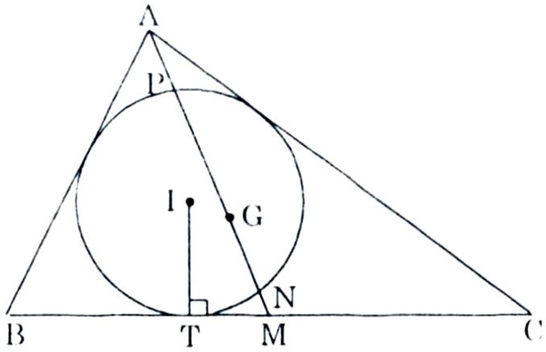
Chú ý : Từ bất đẳng thức (*) ta suy ra một số bất đẳng thức cụ thể mà các bạn có thể gặp trong một số sách tham khảo hay đề thi tuyển sinh đại học.

- Với $m=n=p=1$, ta có : $a^2+b^2+c^2\ge 4S\sqrt{3}$
- Với $\begin{cases}m=\dfrac{bc}{a^2}\\[2mm] n=\dfrac{ca}{b^2}\\[2mm] p=\dfrac{ab}{c^2}\end{cases}$, ta có : $ab+bc+ca\ge 4\sqrt{\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}}.S\ \ge 4\sqrt{3}S$
- Với $a=b=c=1$, ta có : $m+n+p\ge\sqrt{3(mn+np+pm)}$

$$\Leftrightarrow\quad (m+n+p)^2\ge 3(mn+np+pm)\ \ldots$$

BÀI 301. Không giảm tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$.

Ta phải chứng minh $a^2 < 4bc$.



Gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm ΔABC. AM cắt (I) tại P, N (ở hình vẽ) và T là tiếp điểm của (I) với BC.

Ta có : $MT^2 = MN.MP$

và $MN.MP < MG.MA$

(vì G nằm trong (I))

$$\Rightarrow \quad MT^2 < MG.MA \quad \Rightarrow \quad MT^2 < \frac{1}{3}MA^2$$

Hơn nữa : $\begin{cases} MA^2 = m_a^2 = \dfrac{1}{4}(2b^2 + x^2 - a^2) \\ MT = CT - CM = p - c - \dfrac{a}{2} = \dfrac{b - c}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \frac{(b - c)^2}{4} < \frac{1}{12}(2b^2 + x^2 - a^2) \quad \Leftrightarrow \quad 3(b - c)^2 < 2b^2 + x^2 - a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 < 2b^2 + x^2 - 3(b - c)^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < 4bc - (b - c)^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 < 4bc \quad \Rightarrow \quad (\text{Đpcm}).$$

BÀI 302. Theo BĐT Bunhiacopski :

$$\sqrt{a.c} + \sqrt{b.a} \leq \sqrt{a + b}\sqrt{c + a} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{c}) \leq \sqrt{(a + b)(a + c)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{a\sqrt{(a + b)(a + c)}} \leq \frac{a}{a + \sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{c})}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{a + \sqrt{(a + b)(a + c)}} \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Chứng minh tương tự :

$$\frac{b}{b + \sqrt{(b + c)(b + a)}} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

$$+$$

$$\frac{c}{c + \sqrt{(c + a)(c + b)}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{a + \sqrt{(a + b)(a + c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b + c)(b + a)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c + a)(c + b)}} \leq 1$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

BÀI 303. Ta có :

- $$(h_a + h_b + h_c)\underbrace{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)}_{\frac{1}{r}} \geq 9$$

$\Rightarrow h_a + h_b + h_c \geq 9r$

- $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 4R^2(\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C)$

$$\leq 4R^2.\frac{9}{4} = 9R^2$$

Theo BĐT Bunhiacopski :

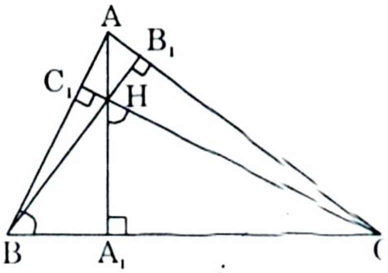
$$(9r)^2 \leq \left(\frac{h_a}{\sqrt{bc}}\sqrt{bc} + \frac{h_b}{\sqrt{ca}}\sqrt{ca} + \frac{h_c}{\sqrt{ab}}\sqrt{ab}\right)^2$$

$$\leq \left(\frac{h_a^2}{bc} + \frac{h_b^2}{ca} + \frac{h_c^2}{ab}\right)(ab + bc + ca)$$

$$\leq 9R^2\left(\frac{h_a^2}{bc} + \frac{h_b^2}{ca} + \frac{h_c^2}{ab}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h_a^2}{bc} + \frac{h_b^2}{ca} + \frac{h_c^2}{ab} \geq \frac{9r^2}{R^2}.$$

BÀI 304. Không giảm tính tổng quát, ta xem :



$a \leq b \leq c \quad \Leftrightarrow \quad A \leq B \leq C$

$\Leftrightarrow \quad \cos A \geq \cos B \geq \cos C$

Hơn nữa, ta có :

$$HA_1 = A_1C\cot B$$

$$= AC\cos C.\cot B$$

$$= 2R\sin B\cos C\frac{\cos B}{\sin B} = 2R\cos B\cos C$$

Chứng minh tương tự : $HB_1 = 2R\cos C\cos A$

$HC_1 = 2R\cos A\cos B$

Do đó : $HA_1 \leq HB_1 \leq HC_1$

Theo BĐT Trêbưsép :

$$(a + b + c)(HA_1 + HB_1 + HC_1) \leq 3(\underbrace{a.HA_1 + b.HB_1 + c.HC_1}_{6S})$$

$$\Rightarrow \frac{HA_1 + HB_1 + HC_1}{a+b+c} \le \frac{6S}{4p^2} \le \frac{3\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2p^2}$$

$$\le \frac{3\sqrt{p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3}}{2p^2} \text{ (Do BĐT Cauchy)}$$

$$\le \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Vậy : $2\sqrt{3}(HA_1 + HB_1 + HC_1) \le a + b + c$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

BÀI 305.

$$VT = 2\sin\frac{A}{2}\left(1+\sin^2\frac{A}{2}\right) + 2\sin\frac{B}{2}\left(1+\sin^2\frac{B}{2}\right) + 2\sin\frac{C}{2}\left(1+\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right) + 2\left(\sin^3\frac{A}{2}+\sin^3\frac{B}{2}+\sin^3\frac{C}{2}\right)$$

Mà $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} \le 2\sin\frac{C}{2}$

Chứng minh tương tự : $\cos B + \cos C \le 2\sin\frac{A}{2}$

$\cos C + \cos A \le 2\sin\frac{B}{2}$

Do đó : $1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C \le \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$

Mặt khác : $\sin^3\frac{A}{2} + \sin^3\frac{B}{2} + \sin^3\frac{C}{2} \ge 3\sqrt[3]{\sin^3\frac{A}{2}.\sin^3\frac{B}{2}.\sin^3\frac{C}{2}}$

$$\ge 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{3r}{4R}$$

Do đó $VT \ge 2\left(1+\frac{r}{R}\right) + 2\frac{3r}{4R} = 2 + \frac{7r}{2R}$

Do a, b, c ≤ 1, ΔABC nhọn.

Giả sử $\text{Max}\{a, b, c\} = a \le 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} \le A < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \le \sin A < 1 \Rightarrow 1 \ge a^2 = 4R^2\sin A^2 \ge 3R^2$$

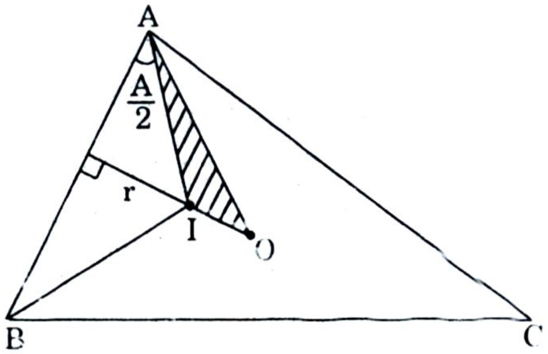
$$\Rightarrow \quad R \le \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad VT \ge 2 + \frac{7\sqrt{3}}{2} r$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều cạnh bằng 1.

BÀI 306. Ta có : $\widehat{AIO} \le 90^0 \quad \Leftrightarrow \quad AO^2 \le IO^2 + IA^2$

$$\Leftrightarrow \quad R^2 \le R^2 - 2Rr + \frac{r^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} \quad \text{(do công thức Euler)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2R \le \frac{r}{\sin^2 \frac{A}{2}}$$



$$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos A \le \frac{r}{R} = \frac{S}{p.R}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos A \le \frac{bc \sin A}{R(a + b + c)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos A \le \frac{2bc \sin^2 A}{2R \sin A(a + b + c)} = \frac{2bc \sin^2 A}{a(a + b + c)}$$

$$\Leftrightarrow \quad a(a + b + c) \le 2bc(1 + \cos A)$$

$$\Leftrightarrow \quad a(a + b + c) \le 2bc + b^2 + c^2 - a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a(a + b + c) \le (b + c)^2 - a^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2a \le b + c.$$

BÀI 307.

Ta có : $2\tan B = \tan A + \tan C = \dfrac{\sin(A + C)}{\cos A \cos C} = \dfrac{\sin B}{\cos A \cos C}$

$$\Leftrightarrow \quad \cos B = 2\cos A.\cos C = \cos(A + C) + \cos(A - C)$$

$$= -\cos B + \cos(A - C)$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\cos B + \cos(A - C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos(A + C) + \cos(A - C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(2\cos^2 \frac{A + C}{2} - 1\right) + 2\cos^2 \frac{A - C}{2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2} = 2\cos^2 \frac{A + C}{2} + \cos^2 \frac{A - C}{2} \ge 2\sqrt{2} \cos \frac{A + C}{2} \cos \frac{A - C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3\sqrt{2}}{4} \ge 2\cos \frac{A + C}{2} \cos \frac{A - C}{2} = \cos A + \cos C$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A + \cos C \le \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

BÀI 308.

Để chứng minh bài toán, trước hết ta chứng minh các bổ đề sau :

Bổ đề 1 :

Cho $\begin{cases} x > y \geq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$, ta luôn có : $x^m - y^m \geq (x - y)^m$.

Chứng minh

Ta có : $0 \leq \dfrac{y}{x}, \ \dfrac{x-y}{x} \leq 1$ nên :

$$\begin{array}{l} + \begin{array}{l} \left(\dfrac{y}{x}\right)^m \leq \dfrac{y}{x} \\ \left(\dfrac{x-y}{x}\right)^m \leq \dfrac{x-y}{x} \end{array} \\ \hline \Rightarrow \left(\dfrac{y}{x}\right)^m + \left(\dfrac{x-y}{x}\right)^m \leq 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x^m - y^m \geq (x-y)^m$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ y = 0 \end{array}\right.$

Bổ đề 2 : Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$, ta luôn có :

a) $\dfrac{x^m + y^m}{2} \geq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^m$ b) $\dfrac{x^m + y^m + z^m}{3} \geq \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^m$

Chứng minh

a) Theo BĐT Bernoulli :

$$\begin{array}{l} + \begin{array}{l} \left(\dfrac{2x}{x+y}\right)^m = \left(1 + \dfrac{x-y}{x+y}\right)^m \geq 1 + \dfrac{m(x-y)}{x+y} \\ \left(\dfrac{2y}{x+y}\right)^m = \left(1 + \dfrac{y-x}{x+y}\right)^m \geq 1 + \dfrac{m(y-x)}{x+y} \end{array} \\ \hline \Rightarrow \left(\dfrac{2x}{x+y}\right)^m + \left(\dfrac{2y}{x+y}\right)^m \geq 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^m + y^m}{2} \geq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^m$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ x = y \end{array}\right.$

b) Theo BĐT câu a), ta có :

$$\frac{x^m + y^m}{2} + \frac{z^m + \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^m}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^m + \left(\frac{z + \frac{x+y+z}{3}}{2}\right)^m$$

$$\geq 2\left(\frac{\frac{x+y}{2} + \frac{z + \frac{x+y+z}{3}}{2}}{2}\right)^m \geq 2\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^m$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^m + y^m + z^m}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^m$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ x = y = z \end{array}\right.$

Bổ đề 3 : Cho $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ m \geq 2 \end{cases}$, ta luôn có :

a) $(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}} \geq x^m + y^m$ b) $\frac{x^m + y^m}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^m + \left|\frac{x-y}{2}\right|^m$

Chứng minh

- Nếu $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$ thì BĐT a) hiển nhiên đúng.
- Nếu x, y > 0, ta có : $0 < \frac{x^2}{x^2+y^2}, \frac{y^2}{x^2+y^2} < 1$

Do đó :
$$\begin{array}{ll} & \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{m}{2}} \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \\ + & \\ & \left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{m}{2}} \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^m + y^m}{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad x^m + y^m \leq (x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}$$

Vậy : $x^m + y^m \leq (x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$

b) Theo BĐT a), ta có :

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^m + \left|\frac{x-y}{2}\right|^m \le \left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left|\frac{x-y}{2}\right|^2\right]^{\frac{m}{2}}$$

$$\le \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \le \frac{x^m+y^m}{2} \quad \text{(Do bổ đề 2a)}$$

Vậy : $\dfrac{x^m+y^m}{2} \ge \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^m + \left|\dfrac{x-y}{2}\right|^m$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ x = y \end{array}\right.$

Bổ đề 4 : Trong ΔABC, ta luôn có :

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

hay $(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) \ge S\sqrt{3}$

(với $2p = a + b + c$).

Chứng minh

Ta có : $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

$\Leftrightarrow [a^2 - (b-c)^2] + [b^2 - (c-a)^2] + [c^2 - (a-b)^2] \ge 4S\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 4(p-b)(p-c) + 4(p-c)(p-a) + 4(p-a)(p-b) \ge 4S\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow xy + yz + zx \ge S\sqrt{3}$ với $\begin{cases} x = p - a > 0 \\ y = p - b > 0 \\ z = p - c > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow xy + yz + zx \ge \sqrt{3xyz(x+y+z)}$

(vì $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}$)

$\Leftrightarrow (xy + yz + zx)^2 \ge 3xyz(x + y + z)$

$\Leftrightarrow (xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 \ge 0$

BĐT cuối luôn đúng.

Vậy : $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Quay lại bài toán.

Trong ΔABC, ta luôn có $\begin{cases} a^2 - (b-c)^2 > 0 \\ b^2 - (c-a)^2 > 0 \\ c^2 - (a-b)^2 > 0 \end{cases}$

Do đó, *theo BĐ1* thì :

$$\begin{array}{rl} & a^{2n} - |b-c|^{2n} \geq [a^2 - (b-c)^2]^n = [4(p-b)(p-c)]^n \\ + & b^{2n} - |c-a|^{2n} \geq [b^2 - (c-a)^2]^n = [4(p-c)(p-a)]^n \\ & c^{2n} - |a-b|^{2n} \geq [c^2 - (a-b)^2]^n = [4(p-a)(p-b)]^n \\ \hline \Rightarrow & a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} - |a-b|^{2n} - |b-c|^{2n} - |c-a|^{2n} \geq \end{array}$$

$$\geq \frac{[4(p-b)(p-c)]^n + [4(p-c)(p-a)]^n}{2} + \frac{[4(p-c)(p-a)]^n + [4(p-a)(p-b)]^n}{2} +$$

$$+ \frac{[4(p-a)(p-b)]^n + [4(p-b)(p-c)]^n}{2}$$

$$\geq \left[\frac{4(p-b)(p-c) + 4(p-c)(p-a)}{2}\right]^n + (a+b-c)^n|a-b|^n +$$

$$+ \left[\frac{4(p-c)(p-a) + 4(p-a)(p-b)}{2}\right]^n + (b+c-a)^n|b-c|^n +$$

$$+ \left[\frac{4(p-a)(p-b) + 4(p-b)(p-c)}{2}\right]^n + (c+a-b)^n|c-a|^n$$

(Do bổ đề 3b)

$$\geq [2(p-b)(p-c) + 2(p-c)(p-a)]^n + [2(p-c)(p-a) + 2(p-a)(p-b)]^n +$$

$$+ [2(p-a)(p-b) + 2(p-b)(p-c)]^n + (b+c-a)^n|b-c|^n +$$

$$+ (c+a-b)^n|c-a|^n + (a+b-c)^n|a-b|^n$$

$$\geq 3\left[\frac{4(p-a)(p-b) + 4(p-b)(p-c) + 4(p-c)(p-a)}{3}\right]^n + (b+c-a)^n|b-c|^n +$$

$$+ (c+a-b)^n|c-a|^n + (a+b-c)^n|a-b|^n$$

(Do bổ đề 2b)

$$\geq 3\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^n + (b+c-a)^n|b-c|^n + (c+a-b)^n|c-a|^n + (a+b-c)^n|a-b|^n$$

(Do bổ đề 4)

Vậy : $a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \geq 3\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)^n S^n + |a - b|^{2n} + |b - c|^{2n} + |c - a|^{2n} +$

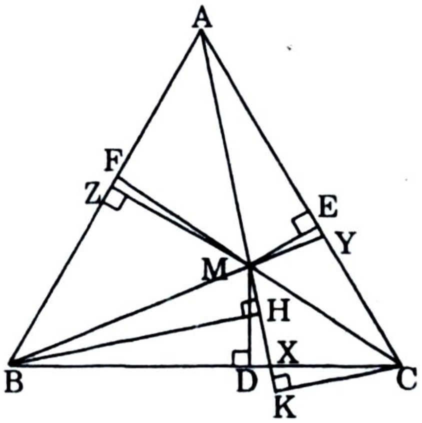
$+ (b + c - a)^n|b - c|^n + (c + a - b)^n|c - a|^n + (a + b - c)^n|a - b|^n$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Chú ý : Bạn đọc hãy liên hệ kết quả bài này với bài 255.

BÀI 309.

Đặt : $\begin{cases} x = S_{\Delta MBC} \\ y = S_{\Delta MCA} \\ z = S_{\Delta MAB} \end{cases}$



Khi đó : $x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (*)

Gọi H, K là hình chiếu của B, C xuống AM, ta có :

$$\frac{BX}{CX} = \frac{BH}{CK} = \frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta MCA}} = \frac{z}{y}$$

Chứng minh tương tự :

$$\frac{CY}{AY} = \frac{x}{z}, \qquad \frac{AZ}{BZ} = \frac{y}{x}$$

Suy ra : $\dfrac{S_{\Delta AYZ}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{AZ.AY}{AB.AC} = \dfrac{AZ.AY}{(AZ + BZ)(AY + CY)}$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{BZ}{AZ}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{CX}{AX}} = \frac{1}{1 + \dfrac{x}{y}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{x}{z}} = \frac{yz}{(x + y)(x + z)}$$

Chứng minh tương tự :

$$\frac{S_{\Delta BZX}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{zx}{(y + z)(y + x)}$$

$+$

$$\frac{S_{\Delta CXY}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{xy}{(z + x)(z + y)}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta XYZ}}{S_{\Delta ABC}} = 1 - \frac{xy}{(z + x)(z + y)} - \frac{yz}{(x + y)(x + z)} - \frac{zx}{(y + z)(y + x)}$$

$$= 1 - \frac{xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)}{(x + y)(y + z)(z + x)}$$

$$= \frac{2xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)}$$

Hơn nữa, từ (*) suy ra :

$$x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB} + z\,\overrightarrow{OC} = x(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + y(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) + z(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC})$$

$$= (x + y + z)\overrightarrow{OM} \text{ (trong đó O là tâm } \Delta ABC)$$

$$\Rightarrow \quad (x + y + z)^2OM^2 = (x^2 + y^2 + z^2)R^2 + 2xy\,\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} +$$

$$+ 2yz\,\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + 2zx\,\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} \text{ (trong đó } OA = R)$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2)R^2 - xyR^2 - yzR^2 - zxR^2$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)R^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{OM^2}{R^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx}{(x + y + z)^2}$$

Do đó, theo công thức Euler :

$$\frac{S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{OM^2}{R^2}\right) = \frac{3(xy + yz + zx)}{4(x + y + z)^2}$$

Từ đó, suy ra : $S_{\Delta DEF} \geq S_{\Delta XYZ}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3(xy + yz + zx)}{4(x + y + z)^2} \geq \frac{2xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 8xyz(x + y + z)^2 \leq \frac{3(xy + yz + zx)}{(x + y)(y + z)(z + x)}$$

Bất đẳng thức cuối đúng, vì :

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9}{8}(x + y)(y + z)(z + x) \geq (x + y)(y + z)(z + x) + xyz$$

$$\geq (x + y + z)(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{8}(x + y)(y + z)(z + x)(xy + yz + zx)$$

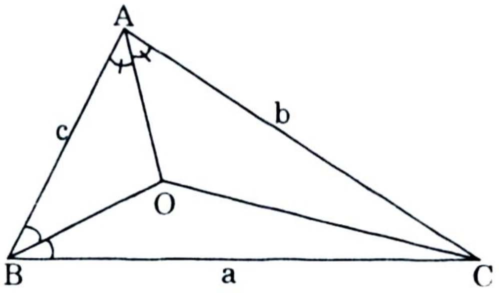
$$\geq (x + y + z)(xy + yz + zx)^2 \geq (x + y + z)3xyz(x + y + z)$$

$$\geq 3xyz(x + y + z)^2$$

$$\Rightarrow \quad 3(x + y)(y + z)(z + z)(xy + yz + zx) \geq 8xyz(x + y + z)^2$$

$\Rightarrow$ (Đpcm).

BÀI 310. Ta có : $2R_1 = \dfrac{BC}{\sin\widehat{BOC}} = \dfrac{a}{\cos\dfrac{A}{2}}$



$$\Rightarrow \quad R_1^2 = \frac{a^2}{4\cos^2\dfrac{A}{2}} = \frac{a^2}{2(1+\cos A)}$$

$$= \frac{a^2}{2\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} = \frac{a^2bc}{(b+c)^2-a^2} = \frac{a^2bc}{4p(p-a)}$$

(với $2p = a + b + c$)

$$\Rightarrow \quad 4\frac{R_1^2}{a^2} = \frac{bc}{p(p-a)}$$

Chứng minh tương tự, ta được :

$$4\frac{R_2^2}{b^2} = \frac{ca}{p(p-b)}\,; \qquad 4\frac{R_3^2}{c^2} = \frac{ab}{p(p-c)}$$

Do đó :

$$4\left(\frac{R_1^2}{a^2}+\frac{R_2^2}{b^2}+\frac{R_3^2}{c^2}\right) = \frac{bc(p-b)(p-c)+ca(p-c)(p-a)+ab(p-a)(p-b)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\le \frac{bc\dfrac{a^2}{4}+ca\dfrac{b^2}{4}+ab\dfrac{c^2}{4}}{S^2} = \frac{\dfrac{1}{4}abc(a+b+c)}{S^2}$$

$$\le \frac{\dfrac{1}{4}.4RS.\dfrac{2S}{r}}{S^2} = \frac{2R}{r}$$

Vậy : $\dfrac{R_1^2}{a^2}+\dfrac{R_2^2}{b^2}+\dfrac{R_3^2}{c^2} \le \dfrac{R}{2r}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

BÀI 311. Gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh của ΔABC.

Ta có : $abc = 4R.S = 4Rrp$ (với $S = S_{\Delta ABC}$)

Theo bất đẳng thức Cauchy :

- $(2p)^3 = (a+b+c)^3 \ge 27abc = 27.4Rrp$

$$\Rightarrow \quad p^2 \ge \frac{27}{2}Rr \qquad (1)$$

- $$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} \le \frac{\sqrt{p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3}}{p} = \frac{p}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad p \ge 3\sqrt{3}.r \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \quad p^3 \ge \dfrac{81\sqrt{3}}{2}Rr^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{\dfrac{1}{4Rr^2}} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2p}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{4Rr^2}} \ge \frac{9\sqrt{3}}{2p}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \ge \frac{9\sqrt{3}}{2p}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ p-a = p-b = p-c \\ R = 2r \end{cases} \Leftrightarrow$ ΔABC đều.

BÀI 312. Trước hết ta chứng minh bổ đề :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha} \le \frac{a^{\alpha} + b^{\alpha}}{2}, \ \forall a, b > 0 \qquad (*)$$

Quả vậy : $(*) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{2a}{a+b}\right)^{\alpha} + \left(\dfrac{2b}{a+b}\right)^{\alpha} \ge 2 \qquad (**)$

Theo BĐT Bernoulli :

$$\begin{array}{rl} & \left(\dfrac{2a}{a+b}\right)^{\alpha} = \left(1 + \dfrac{a-b}{a+b}\right)^{\alpha} \ge 1 + \alpha\dfrac{a-b}{a+b} \\ + & \\ & \left(\dfrac{2b}{a+b}\right)^{\alpha} = \left(1 + \dfrac{a-b}{a+b}\right)^{\alpha} \ge 1 + \alpha\dfrac{b-a}{a+b} \\ \hline \Rightarrow & \left(\dfrac{2a}{a+b}\right)^{\alpha} + \left(\dfrac{2b}{a+b}\right)^{\alpha} \ge 2 \quad \Rightarrow \quad (**) \text{ đúng} \end{array}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow a = b \Rightarrow (*)$ đúng

Áp dụng bổ đề trên, ta có :

$$\left(\frac{(\sin A)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin B)^{\frac{1}{\alpha}}}{2}\right)^{\alpha} \le \frac{\sin A + \sin B}{2} = \cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} \le \cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (\sin A)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin B)^{\frac{1}{\alpha}} \le 2\left(\cos\frac{C}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ A = B.

Chứng minh tương tự :

$$(\sin C)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin A)^{\frac{1}{\alpha}} \le 2\left(\cos\frac{B}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \text{Dấu "="} \Leftrightarrow \quad C = A$$

$$(\sin B)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin C)^{\frac{1}{\alpha}} \le 2\left(\cos\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \text{Dấu "="} \Leftrightarrow \quad B = C$$

$$\Rightarrow \quad (\sin A)^{\frac{1}{\mu}} + (\sin B)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin C)^{\frac{1}{\alpha}} \le \left(\cos\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\cos\frac{B}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\cos\frac{C}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$\Leftarrow \quad Q \le 1$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

BÀI 313. Không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử $A \ge B \ge C$

$\Rightarrow \quad \text{Max}\{A, B, C\} = A.$

Vì vậy bài toán trở thành : Chứng minh $A > \dfrac{2\pi}{3}$ (1)

Từ giả thiết đã cho, suy ra :

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{\sqrt{3}} \le \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (2)$$

(vì $\cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$)

$$\Rightarrow \quad \sin A + \sin B + \sin C \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Giả sử (1) sai, tức là } A \le \dfrac{2\pi}{3} \\ \text{Do } A \ge B \ge C \quad \Rightarrow \quad A \ge \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{3} \le A \le \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \sin A \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin A + \sin B + \sin C > \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow$ vô lí. Vậy : $A > \dfrac{2\pi}{3}$.

BÀI 314. Đặt BC = a, CA = b, AB = c.

Áp dụng định lí hàm cos, ta có :

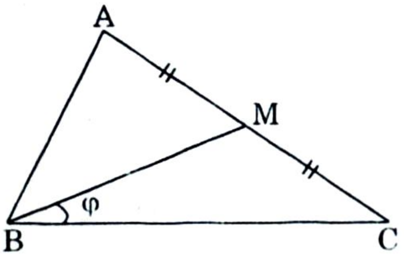
$$\cot A + 3\cot\varphi = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S_{\Delta ABC}} + 3\,\frac{BC^2+BM^2-MC^2}{4S_{\Delta BCM}}$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2}{4S_{\Delta ABC}} + 3\,\frac{a^2+\dfrac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}-\dfrac{b^2}{4}}{2S_{\Delta ABC}}$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2}{4S_{\Delta ABC}} + \frac{3(3a^2+c^2-b^2)}{4S_{\Delta ABC}}$$

$$= \frac{4a^2+2c^2-b^2}{2S_{\Delta ABC}} = \frac{(2a^2+2c^2-b^2)+2a^2}{2S_{\Delta ABC}}$$

$$= \frac{4BM^2+2a^2}{2S_{\Delta ABC}} \ge \frac{2\sqrt{2}\,BM\,a}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin\varphi}$$



$$\Rightarrow \quad \cot A + 3\cot\varphi \ge \frac{2\sqrt{2}}{\sin\varphi} \quad \Rightarrow \quad \cot A \ge \frac{2\sqrt{2}-3\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow b = c\sqrt{2}$.

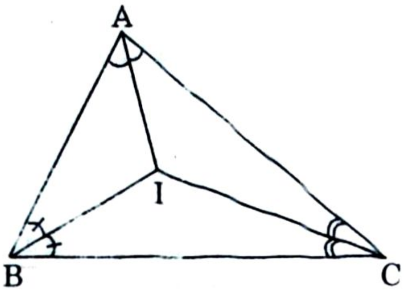
BÀI 315.

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \quad 2\dfrac{r}{IA}\cdot\dfrac{r}{IB} + 2\dfrac{r}{IB}\cdot\dfrac{r}{IC} + 2\dfrac{r}{IC}\cdot\dfrac{r}{IA} \le 1 + \dfrac{r}{R}$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \le$$

$$\le \cos A + \cos B + \cos C \qquad (2)$$

Ta có : $\dfrac{\cos\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}} + \dfrac{\cos\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}} \ge 2$



$$\Rightarrow \quad \sin\frac{A}{2}\,\sin\frac{B}{2}\left(\frac{\cos\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}} + \frac{\cos\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}\right) \ge$$

$$\ge 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\sin A.\tan\frac{B}{2} + \sin B.\tan\frac{A}{2}\right) \ge 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

Chứng minh tương tự :

$$\frac{1}{2}\left(\sin B\tan\frac{C}{2}+\sin C\tan\frac{B}{2}\right)\geq 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$+\quad \frac{1}{2}\left(\sin C\tan\frac{A}{2}+\sin A\tan\frac{C}{2}\right)\geq 2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \text{VT}(2)\leq \frac{1}{2}\tan\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)+\frac{1}{2}\tan\frac{B}{2}(\sin C+\sin A)+$$

$$+\frac{1}{2}\tan\frac{C}{2}(\sin A+\sin B)$$

$$\leq \cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\leq \cos A+\cos B+\cos C=\text{VP}(2).$$

BÀI 316. Ta nhận thấy : $m_a \geq \dfrac{b^2+c^2}{4R}$ (1)

$\Leftrightarrow \quad 4m_a^2 \geq (b\sin B + c\sin C)^2$

$\Leftrightarrow \quad 2b^2 + x^2 - a^2 \geq b^2\sin^2 B + c^2\sin^2 C + 2bc\sin B.\sin C$

$\Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 + 2bc\cos A \geq b^2\sin^2 B + c^2\sin^2 C + 2bc\sin B\sin C$

$\Leftrightarrow \quad b^2\cos^2 B + c^2\cos^2 C - 2bc\cos B\cos C \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (b\cos B - c\cos C)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Vậy : $m_a \geq \dfrac{b^2+c^2}{4R}$

Chứng minh tương tự : $m_b \geq \dfrac{c^2+a^2}{4R}$

$$+\quad m_c \geq \frac{a^2+b^2}{4R}$$

$$\Rightarrow \quad m_a + m_b + m_c \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2R}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} b\cos B = c\cos C \\ c\cos C = a\cos A \\ a\cos A = b\cos B \end{cases} \Leftrightarrow a\cos A = b\cos B = c\cos C$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < A, B, C < \dfrac{\pi}{2} \\ \sin 2A = \sin 2B = \sin 2C \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C = \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Tóm lại ta luôn có : $m_a + m_b + m_c \geq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

BÀI 317. Ta có : $T = \cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C - 3$

$$= 2\cos^2 A + 4\sqrt{2}\cos\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2} - 4$$

$$= 2\cos^2 A + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2} - 4$$

Do $\sin\dfrac{A}{2} > 0$ và $\cos\dfrac{B-C}{2} \leq 1$ nên ta có :

$$T \leq 2\cos^2 A + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 4 \qquad (1)$$

Mặt khác, ΔABC không tù nên : $0 \leq \cos A < 1 \quad \Rightarrow \cos A \geq \cos^2 A$ (2)

Từ (1) và (2) ta có :

$$T \leq 2\cos A + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 4 = -4\sin^2\frac{A}{2} + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 2$$

$$= -2\left(\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 1\right)^2 \leq 0$$

Vậy : $\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C \leq 3$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC vuông cân tại A.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

318. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{r}{R} = 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{1}{2}$

b) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2}$

c)* $\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{4R + r}{p}$

d)* $\tan\dfrac{A}{2}\left(1 + \cos\dfrac{A}{2}\right) + \tan\dfrac{B}{2}\left(1 + \cos\dfrac{B}{2}\right) + \tan\dfrac{C}{2}\left(1 + \cos\dfrac{C}{2}\right) \geq$

$$\geq \frac{p(R + r) + R(4R + r)}{pR}$$

319*. Cho ΔABC có $A > B > C$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x - \sin A}{x - \sin C}} + \sqrt{\frac{x - \sin B}{x - \sin C}} - 1.$$

320. Trong mọi tam giác ABC, ta đều có : $\sin A.\sin B \leq \cos^2\frac{C}{2}$.

321. Cho ΔABC, có $0 < A \leq B \leq \frac{\pi}{3} \leq C$. Chứng minh rằng :

a) $\cos A + \cos B + \cos C \geq \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

b) $\frac{r}{R} \geq \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

322*. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $\frac{4}{5}(m_am_b + m_bm_c + m_cm_a) < ab + bc + ca$

b) $\frac{20}{9}(m_am_b + m_bm_c + m_cm_a) > ab + bc + ca$

c) $m_al_a + m_bl_b + m_cl_c \geq p^2$

d) $\frac{1}{a^2m_a} + \frac{1}{b^2m_b} + \frac{1}{c^2m_c} \geq \frac{3}{abc}$

e) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq (m_a - m_b)^2 + (m_b - m_c)^2 + (m_c - m_a)^2$.

323*. Cho ΔABC nhọn. Chứng minh :

a) $\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq \frac{R}{r} + 1$

b) $ab + bc + ca \leq 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$.

324*. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $36r^2 \leq ab + bc + ca \leq 9R^2$

b) $(b + c - a)^{-1} + (c + a - b)^{-1} + (a + b - c)^{-1} \geq \frac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}}$

c) $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} \geq \sqrt{\frac{3}{2Rr}}$.

325. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2(c - 2b) + b^2(a - 2c) + c^2(b - 2a) + 6abc$

b) $\dfrac{l_a}{r_b + r_c} + \dfrac{l_b}{r_c + r_a} + \dfrac{l_c}{r_a + r_b} \le \dfrac{3}{2}$.

326. Cho ΔABC, AH là đường cao. Gọi p(XYZ) là nửa chu vi ΔXYZ.

Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $p^2(ABC) = p^2(ABH) + p^2(ACH)$.

327*. Cho ΔABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, thỏa điều kiện :

$$8R^3.h_a.h_b.h_c = 27IA^2.IB^2.IC^2.$$

Chứng minh ΔABC đều.

328. Cho ΔABC nhọn. H là trực tâm. AA_1, BB_1, CC_1 là ba đường cao của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $M = \dfrac{AH}{A_1H} + \dfrac{BH}{B_1H} + \dfrac{CH}{C_1H}$

b) $N = \left(\dfrac{AH}{A_1H}\right)^2 + \left(\dfrac{BH}{B_1H}\right)^2 + \left(\dfrac{CH}{C_1H}\right)^2$.

329. Cho ΔABC nhọn. H là trực tâm, AD đường cao và $\dfrac{AH}{HD} = m$.

Tính tanB.tanC và từ đó chứng minh : $\tan A \ge \dfrac{2\sqrt{m+1}}{n}$.

330. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $\begin{cases} 3^{\sin A - \sin B} = 1 + 4(\sin B - \sin A) \\ 3^{\sin A - \sin C} = 1 + 4(\sin A - \sin C). \end{cases}$

331*. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

$$(2a^2 + 2b^2 - c^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2c^2 + 2a^2 - b^2) \le$$
$$\le (2a^2 + bc)(2b^2 + ca)(2c^2 + ab).$$

332*. Cho ΔABC, G là trọng tâm. AG, BG, CG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác lần lượt tại D, E, F.

Chứng minh rằng : $\dfrac{3}{R} \le \dfrac{1}{GD} + \dfrac{1}{GE} + \dfrac{1}{GF} \le \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$.

333. Cho ΔABC nhọn có tanA, tanB, tanC là ba nghiệm của phương trình :

$$x^3 + px^2 + qa + p = 0$$

Chứng minh rằng : $p \le -3\sqrt{3}$.

334. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $\begin{cases} \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1 \\ \sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0. \end{cases}$

335. Cho ΔABC. Tìm giá trị lớn nhất của :

a) $y = \sqrt{1 + 2009.\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}} + \sqrt{1 + 2009.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}} + \sqrt{1 + 2009.\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}}$

b) $y = \sqrt{1001 + \cos A} + \sqrt{1001 + \cos B} + \sqrt{1001 + \cos C}$.

336. Cho ΔABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $y = \frac{\sin A + \sin B}{\sin(A + B)} + \frac{\sin B + \sin C}{\sin(B + C)} + \frac{\sin C + \sin A}{\sin(C + A)}$

b) $y = \frac{\sin(A + B)}{\sin A + \sin B} + \frac{\sin(B + C)}{\sin B + \sin C} + \frac{\sin(C + A)}{\sin C + \sin A}$.

337. Cho ΔABC. Chứng minh rằng : $\sin^2 x.a^2 + \cos^2 x.b^2 > \frac{1}{2}\sin^2 2x.c^2$, $\forall x \in R$.

338. Cho ΔABC. Chứng minh rằng : $(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)(l_a^2 + l_b^2 + l_c^2) \geq 27S^2$

Dấu "=" xảy ra khi nào ?

339. Cho ΔABC vuông tại C. Chứng minh rằng :

a) $\sqrt{\ln c - \ln a} + \sqrt{\ln c - \ln b} \leq 2\sqrt{\ln\left(\frac{ca + cb}{2ab}\right)}$

b) $c < a + b \leq \sqrt{2}c$ và $a^4 + b^4 \geq \frac{c^2}{2}$

c) $\frac{ab}{p - c} + \frac{bc}{p - a} + \frac{ca}{p - b} > 2(a + b + \sqrt{2ab})$.

340*. Chứng minh rằng trong ΔABC : $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} + \frac{3r}{4R} \leq \frac{9}{8}$.

341. Nhận dạng ΔABC biết rằng :

$$\cos\frac{A - B}{2} + \cos\frac{B - C}{2} + \cos\frac{C - A}{2} \leq$$

$$\leq \cos\frac{1}{3}\left(A - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{1}{3}\left(B - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{1}{3}\left(C - \frac{\pi}{3}\right).$$

342. Cho ΔABC nhọn. Chứng minh rằng :

$$(\tan A + \tan B + \tan C)(\cot A + \cot B + \cot C) \geq$$

$$\geq \left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) \geq \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

343. Cho ΔABC, hãy nhận dạng tam giác, biết rằng :

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = \left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2$$

344. Cho ΔABC nhọn.

Nhận dạng tam giác (khi một trong các điều kiện sau được thỏa) :

a) $\cos A.\cos B.\cos C = \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

b) $\sin\frac{A}{2}.\sqrt{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

345. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $(1 - \sin A)(1 - \sin B)(1 - \sin C) \le \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

b) $(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \le \frac{1}{8}$

c) $2 < \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \le \frac{9}{4}$

d) $\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{\sin A + \sin B + \sin C} > \frac{1}{2}$.

346. Nhận dạng ΔABC, biết rằng :

a) $\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{a} + \frac{\cos^2\frac{B}{2}}{b} + \frac{\cos^2\frac{C}{2}}{c} \ge \frac{27}{8p}$

b) $(\tan A.\tan B - 1)(\tan A.\tan C - 1) \ge 4$ (với $A \ge B \ge C$)

c) $0,4 < \frac{r}{h_a} < 0,5$ (với $C \ge \frac{\pi}{2}$)

347. Cho ΔABC, nhận dạng tam giác, biết rằng :

$$\sqrt{3}.\cos A + 2.\cos B + 2\sqrt{3}.\cos C = 4.$$

348. Tìm giá trị nhỏ nhất (trong ΔABC) :

a) $P = \frac{1}{x}\sin^2 A + \frac{1}{y}\sin^2 B + \frac{1}{z}\sin^2 C$ theo x, y, z

(trong đó : $y + z < x$, $z + x < y$, $x + y < z$)

b) $Q = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{Rr}$.

349. Cho M nằm trong tam giác nhọn ΔABC. Gọi x, y, z là khoảng cách từ M đến BC, CA, AB (tương ứng).

Chứng minh rằng :

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$

b) $\left(\dfrac{a}{b + c}\right)^{2010} + \left(\dfrac{b}{c + a}\right)^{2010} + \left(\dfrac{c}{a + b}\right)^{2010} \ge \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2p}{3}\right)^{2009}$.

350*. Cho ΔABC và X, Y, Z theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh rằng :

a) $a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C \le 2(YZ.\cos A + ZX.\cos B + XY.\cos C)$

b) $m_a.\cos\dfrac{A}{2} + m_b.\cos\dfrac{B}{2} + m_c.\cos\dfrac{C}{2} \ge \dfrac{3p}{2}$

c) $3(a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C) \le 2p\left(\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2}\right)$.

351*. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các phân giác trong AD, BE, CF cắt (O) tại A', B', C' (tương ứng).

Chứng minh rằng :

a) $AA' + BB' + CC' > 2p$

b) $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2} < \dfrac{1}{3}$ (biết : $a + b < 3c$)

c) $a + b \le \dfrac{5c}{4}$ (biết : $2A + 3B = \pi$)

d) $S < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (biết : $l_a \le l_b \le l_c < 1$)

e) $A < \dfrac{1}{2}(B + C)$ (biết $a = \dfrac{1}{2}(b + c)$).

352*. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $\left(\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{\cot A + \cot B + \cot C}\right)^3 \le \dfrac{a^2.b^2.c^2}{\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}.\tan\dfrac{C}{2}}$

b) $(1 + b + c - bc)\cos A + (1 + c + a - ca)\cos B + (1 + a + b - ab)\cos C \le 3$.

c) $R + r \ge \sqrt[4]{3}.\sqrt{S}$

d) $1 + \cos A.\cos B.\cos C \ge \sqrt{3}\sin A.\sin B.\sin C$

e) $\left(1+\dfrac{1}{\sin^{\alpha}\dfrac{A}{2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sin^{\alpha}\dfrac{B}{2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sin^{\alpha}\dfrac{C}{2}}\right) \geq (1+2^{\alpha})^3, \forall\alpha > 0.$

353*. Cho H là trực tâm ΔABC nhọn, chứng minh rằng :

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(a + b + c).$$

354. Cho hình chữ nhật có chu vi p và diện tích S.

Chứng minh rằng : $p \geq \dfrac{32S}{2S + p + 2}$.

Dấu "=" xảy ra khi nào ?

355. Cho ΔABC nhọn. Chứng minh rằng :

$$(\sin A)^{\sin A}.(\sin B)^{\sin B}.(\sin C)^{\sin C} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}.$$

356. Cho ΔABC. Chứng minh rằng : $a^4 + b^4 + c^4 \geq 2pabc$.

Dấu "=" xảy ra khi nào ?

357*. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}.$$

358. Cho ΔABC có : $2\cot B = \cot A + \cot C$.

Chứng minh rằng : $\cot^6 A + \cot^6 C \geq 2\cot^6 B$.

Dấu "=" xảy ra khi nào ?

359*. Cho M nằm trong ΔABC. Tìm vị trí của M để :

$Q = MA.a + MB.b + MC.c$ nhỏ nhất.

360. Cho ΔABC có $a \geq b \geq c \geq 1$. Chứng minh : $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq abc$.

Dấu "=" xảy ra khi nào ?

361. Cho tứ giác lồi ABCD.

Chứng minh rằng : $S_{ABCD} \leq \dfrac{1}{4}(AC^2 + BD^2)$.

362*. Cho S là diện tích tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geq 2\sqrt{3}S + \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2).$$

MỤC LỤC

Chương 1. ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

MỘT SỐ CÔNG THỨC CẦN NHỚ 3

CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 : Bài tập liên hệ góc

+ Bài tập có lời giải 17
+ Lời giải 20
+ Bài tập tự giải 28

Dạng 2 : Bài tập liên hệ góc và cạnh

A. Các hệ thức liên hệ góc và cạnh 31
  + Bài tập có lời giải 31
  + Lời giải 40
  + Bài tập tự giải 75
B. Tính các yếu tố trong tam giác 77
  + Bài tập có lời giải 78
  + Lời giải 81
  + Bài tập tự giải 97

Chương 2. NHẬN DẠNG TAM GIÁC (không dùng bất đẳng thức)

A. Nhận dạng tam giác đều 99
  + Bài tập có lời giải 99
  + Lời giải 102
B. Nhận dạng tam giác cân và tam giác vuông 112
  + Bài tập có lời giải 112
  + Lời giải 115
C. Nhận dạng một số tam giác khác 126
  + Bài tập có lời giải 126
  + Lời giải 127
  + Bài tập tự giải 132

Chương 3. BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC CẦN NHỚ 135

CÁC DẠNG BÀI TẬP

A. Sử dụng bất đẳng thức để nhận dạng tam giác 139
- Bài tập có lời giải 139
- Lời giải 142
- Bài tập tự giải 154

B. Bất đẳng thức tam giác 157
- Bài tập có lời giải 157
- Lời giải 172
- Bài tập tự giải 238

Mời bạn tìm đọc

***Nhà sách* PHƯƠNG**
Số 04 Lý Thái Tổ - Đà Nẵng * ĐT: 3823421

***Nhà sách* MINH TRÍ**
Số 103 Lý Thái Tổ - Đà Nẵng * ĐT: 3824452

***Nhà sách* LAM CHÂU**
Số 129 Phan Chu Trinh - Đà Nẵng * ĐT: 3821317

***Nhà sách* TRẦN QUỐC TUẤN**
Số 526 Quang Trung - Quảng Ngãi * ĐT: 3822067

***Nhà sách* GIÁO KHOA**
Số 341 Phan Chu Trinh - Tam Kì - Q.Nam * ĐT: 3851229

***Nhà sách* MINH TRÍ**
Số 278 Lê Hồng Phong - Quy Nhơn * ĐT: 3823453

***Nhà sách* NHÃ TRANG**
Số 124 Quốc lộ 1 - Ba Ngòi - Cam Ranh * ĐT: 3854496

***Nhà sách* VĂN NGHỆ**
Số 295 Đường 30/4 - Tây Ninh * ĐT: 3827249 - 6250336

***Nhà sách* GIÁO DỤC**
Số 19 Trường Chinh - Buôn Ma Thuột * ĐT: 3953408

***Nhà sách* SIÊU THỊ VĂN HÓA**
Số 06 Lê Lợi - Tp Pleiku - Gia Lai * ĐT: 3824340

***Nhà sách* VĂN HÓA QUANG TRUNG**
Số 24 Hoàng Văn Thụ - An Khê - Gia Lai * ĐT: 3832218

***Nhà sách* VĂN HÓA VINH**
Số 343 Lê Duẩn - Tp Vinh - Nghệ An * ĐT: 3558582

***Nhà sách* VĂN HÓA THANH HÓA**
Số 27 - 29 Đại lộ Lê Lợi - Tp Thanh Hóa * ĐT: 6252088

***Nhà sách* SIÊU THỊ VĂN HÓA TAM KÌ**
Số 24 Trần Cao Vân - Tam Kì - Quảng Nam * ĐT: 3825539

***Nhà sách* SIÊU THỊ VĂN HÓA QUẢNG NGÃI**
Số 204 Nguyễn Nghiêm - Tp Quảng Ngãi * ĐT: 6250144

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: ANH THƯ – HỮU NGUYÊN

Đối tác liên kết xuất bản:
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Mã số: 1L – 328ĐH2009
In 2000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty TNHH In Bao bì Phong Tân.
Số xuất bản: 1071 – 2009/CXB/44 – 201/ĐHQGHN, ngày 25/11/2009.
Quyết định xuất bản số: 328LK-TN/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2010.